Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM

03

Didattica della Matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Programmare giocando con ScratchJr
nella scuola dell'infanzia.
La corrispondenza quantità-numero
Annarosa Serpe

Flipped classroom per la
formazione insegnanti: una ricerca
sulla percezione degli studenti
Gemma Carotenuto
e Silvia Sbaragli

Studio di fattibilità per la posa
di pannelli fotovoltaici sul tetto
della scuola media di Minusio
Sara Cataldi Spinola

Dare senso alle risposte degli
studenti: la conoscenza interpretativa
nella formazione insegnanti
Maria Mellone, Carlos Miguel Ribeiro
e Arne Jakobsen

Deltoidi come aquiloni.
Un "volo" attraverso la geometria
Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi,
Janna Nardi, Floriana Paternoster,
Daniela Rivelli e Daniela Zambon

Il controllo semantico sui testi
matematici all'inizio dell'università
Pier Luigi Ferrari

Un percorso di peer education
nella scuola superiore incentrato
sulla parabola
Michele Canducci

ISSN 2504-5210

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Repubblica e Canton Ticino, Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport (DECS).

Grafica:
Jessica Gallarate
Servizio Risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC)
Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI

Impaginazione:
Luca Belfiore

Periodico semestrale, ISSN 2504-5210

DdM
Didattica
della
Matematica

03

maggio 2018

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

Editoriale

La rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* giunge al terzo numero, il primo dell'anno 2018. Lo fa mantenendo l'impostazione e le finalità scelte fin dalla sua nascita: avvicinare il mondo della ricerca in didattica della matematica con quello della quotidianità delle esperienze didattiche, entrambi riferiti a tutti gli ordini scolastici.

Riteniamo interessante fornire un riscontro sui dati di fruizione della rivista, disponibili grazie ai software di analisi di Google Analitics. Dalla nascita ad oggi sono stati 7653 gli utenti che hanno visitato la rivista: il primo numero ne ha registrati 3475, il secondo 4178, mostrando un aumento negli accessi di circa il 20%. Il numero totale delle sessioni è stato di 11416 (5246 relative al primo numero), mentre il numero totale di pagine visualizzate nel primo anno di vita della rivista è di 34493 (15456 relative al primo numero). Questi incoraggianti segnali di crescita testimoniano come vi sia un bisogno e un desiderio di ricerca e di condivisione di pratiche didattiche tra i ricercatori e i docenti e come si possa favorire una proficua contaminazione tra questi due mondi.

Dal punto di vista della provenienza geografica, il Paese con il maggior numero di utenti della piattaforma è l'Italia (86,7%) seguito dalla Svizzera (10,8%), prevalentemente dal Canton Ticino di lingua italiana. La parte rimanente viene spartita in percentuali inferiori all'1% principalmente in Europa e USA (ma ci sono accessi inaspettati anche dall'Asia, Sud America, Africa e Oceania).

È importante sottolineare che il 61% degli utenti ha meno di 34 anni, e che se si aggiunge la fascia di età fino ai 44 anni, la percentuale sale al 77% degli utenti totali. La fascia di utenza con percentuale maggiore è quella d'età compresa fra i 25 e i 34 anni (33,5%), seguita da quella dai 18 ai 24 anni (27,5%). Questi dati mettono in evidenza l'interesse all'approfondimento didattico e disciplinare da parte di studenti e giovani insegnanti e ricercatori; informazione che motiva la redazione a procedere nella direzione scelta per la rivista.

In questo numero, nella sezione *Riflessione e ricerca*, tutti i contributi sono rivolti al settore terziario dell'educazione, fornendo un interessante spaccato in questo ambito. Nel primo vengono presentati i risultati di ricerca sulla percezione degli studenti, futuri docenti di scuola elementare, dell'approccio flipped classroom, implementato in un corso di geometria e didattica della geometria presso il Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno (Svizzera). Nel secondo contributo viene proposta una prima interpretazione, basata sui risultati di una prova di verifica in entrata delle competenze matematiche, di alcune delle difficoltà linguistiche che studenti universitari di area scientifica si trovano a vivere in contesto matematico. Infine, nell'ultimo articolo della sezione si affronta, attraverso il quadro di riferimento della Conoscenza Matematica per l'Insegnamento (MKT), il tema della conoscenza interpretativa in riferimento ad un gruppo di maestri in formazione.
La seconda parte della rivista, relativa alle *Esperienze didattiche*, presenta in questo numero contributi riferiti ai quattro ordini scolastici: infanzia, elementari, medie e superiori. Il primo articolo racconta un percorso di *peer education* vissuto per la prima volta da studenti di liceo, incentrato sulla parabola e le disequazioni di II grado; vengono descritte le fasi del progetto, analizzate le percezioni degli stu-

denti relative all'approccio cooperativo e si identificano alcune delle criticità già note in ambito di ricerca. Il secondo articolo fa riferimento ad un'esperienza didattica realizzata durante un intero anno scolastico con una classe terza della scuola media di Minusio (Svizzera): gli studenti, stimolati da una situazione-problema riguardante lo studio di fattibilità per la posa di pannelli fotovoltaici sul tetto della scuola, affrontano questioni tecniche, costruiscono conoscenze in varie discipline e sviluppano competenze matematiche e trasversali, in ottica laboratoriale. Il terzo articolo presenta un percorso di geometria piana incentrato sulla figura del deltoide; la metodologia descritta, con indicazioni organizzative e logistiche delle fasi di lavoro, è attiva, operativa, e fa uso di artefatti fisici e di software geometrici. L'ultimo contributo è quello relativo alla scuola dell'infanzia, nel quale si descrive un percorso legato alla pratica del coding, utilizzato per lavorare con la corrispondenza quantità-numero; vengono presentati il quadro teorico di riferimento, gli strumenti informatici utilizzati in sezione (ScratchJr) e i risultati ottenuti dal monitoraggio delle attività dei bambini.

La ricchezza e la varietà dei contributi, che coprono tutto l'arco di formazione dai 3 ai 23 anni, mostrano ancora una volta come vi sia un intero mondo di insegnanti e ricercatori che studiano, approfondiscono, elaborano e ricercano modi e strategie per rendere le dinamiche del processo di insegnamento/apprendimento della matematica sempre più consapevoli negli insegnanti, e sempre più significative per gli studenti.

Vogliamo cogliere l'occasione per ringraziare tutte le persone che in forme diverse hanno sostenuto questo progetto e contribuiscono quotidianamente alla sua realizzazione: inviando contributi, accettando di fare il referaggio degli articoli, effettuando la revisione e la grafica, contribuendo a diffonderla ecc. Solo grazie al prezioso apporto di tutte queste figure è possibile portare avanti questo ambizioso, e allo stesso tempo gratificante, progetto.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Editorial

The journal *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* comes to its third issue, the first in 2018. The new issue is true to its chosen approach and aims: bringing the world of research in Mathematics' education and the world of everyday learning experiences closer to each other, addressing all school levels.

We deem interesting to give a feedback on the analytics of the journal. Since its birth, 7653 users have visited the journal platform: the first issue registered 3475 users, the second issue 4178, with an increase of about 20%. The total number of sessions has been 11416 (5246 for the first issue), while the total number of page views in the journal's first year of life is 34493 (15456 for the first issue). These encouraging indicators of growth confirm the need and desire of researching and sharing Mathematics' education experiences among researchers and teachers; and that such a fruitful exchange between these two worlds can happen.

From a geographic point of view, the country with the highest number of readers is Italy (86,7%) followed by Switzerland (10,8%), mainly from Canton Ticino and of Italian language. The remaining part is divided in percentage lower than 1%, mainly in Europe and the USA (but there have been unexpected accesses from Asia, South America, Africa and Oceania).

It is important to underline that 61% of the users is under 34 years of age; extending the age group up to 44 years of age includes 77% of the total users. The age range which includes most users is 25 to 34 years of age (33,5%), followed by 18 to 24 years of age (27,5%). These statistics highlight students', young teachers' and researchers' interest in educational and mathematical discussion; such information motivates the editorial staff to proceed further in the direction chosen for the journal.

In the section *Riflessione e ricerca*, all the papers are oriented to tertiary education, providing interesting insights in this area. The first paper presents research results about students' perception of a flipped classroom approach, implemented in a geometry and geometry education course hold at Dipartimento formazione e apprendimento of SUPSI in Locarno (Switzerland). The second paper proposes a first interpretation, based on the results of an entry test aimed at verifying Mathematics competences, of some linguistic difficulties that university students of scientific areas experience while doing Mathematics. Furthermore, the last paper of the section deals with the topic of the interpretative knowledge in relation to a group of prospective teachers, through the framework of the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

The second section of this issue, *Esperienze didattiche*, presents papers referring to all four school levels: kindergarten, primary, secondary and high school. The first paper presents the experience of a first approach to *peer education*, both for the teacher and for the students, focusing on the parabola and II degree inequalities; the paper describes the phases of the project, analyses the students' perceptions about the cooperative approach and identifies some of the problematic issues already known in literature. The second paper refers to an experience conducted throughout a whole school year with a third-year class of the secondary school (grade 8) in Minusio (Switzerland): the students, stimulated by a problematic situation regarding the feasibility study for laying solar panels on the school's rooftop, deal with technical issues, build knowledge of several subjects and develop mathematical and transversal competences, in laboratorial modality. The third paper presents an experience of plane geometry focused on the deltoid figure; the methodology described, with organizing and logistic indications of the activity phases, is active, operative and uses physical artifacts and geometric software. The last paper, which is relative to kindergarten, describes an experience related to the practice of coding, used for working on the quantity-number correlation; the paper presents the theoretical framework, the informatics instruments used (ScratchJr) and the results obtained by monitoring the children's activities.

The richness and the variety of the papers, which cover the whole education system between 3 and 23 years of age, once again shows how there is an entire world of teachers and researchers who study, expand, elaborate and research ways and strategies to make the dynamics of teaching/learning Mathematics more and more transparent to teachers and meaningful for students.

We want to take the opportunity to thank all the people who in various forms have supported this project and contribute daily to its realization: submitting papers, agreeing to make peer-reviews, editing text, layouting and editing the graphics, contributing to promote the journal, etc. Only thanks to the precious efforts of these people it is possible to carry on this ambitious and, at the same time, gratifying project.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Riflessione e ricerca

DdM

Flipped classroom per la formazione insegnanti: una ricerca sulla percezione degli studenti

Flipped classroom for teachers' training: a research about students' perception

Gemma Carotenuto* **e Silvia Sbaragli•**

*Università degli Studi Suor Orsola Benincasa – Napoli, Italia

•Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera

Sunto / Viene presentata un'esperienza didattica in cui è stato adottato l'approccio flipped classroom, integrato con una progettazione a ritroso, della quale si riportano i risultati di ricerca sulla percezione degli studenti. Il contesto di sperimentazione è stato un corso di geometria e didattica della geometria, rientrante nella formazione iniziale di futuri insegnanti di scuola elementare offerta dal Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI), che ha sede a Locarno. Dai risultati emergono percezioni positive da parte degli studenti dell'approccio flipped classroom, rispetto alla sua efficacia, al confronto con la metodologia usuale e agli aspetti apprezzati o considerati da migliorare dell'intero corso. Da tali risultati sono state inoltre ricavate considerazioni operative sull'implementazione dell'approccio flipped classroom in ambito terziario. La ricerca si inserisce in un più ampio progetto di ricerca dal titolo *Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze*, che ha coinvolto diversi dipartimenti della SUPSI, in collaborazione con la Fernfachhochschule Schweiz di Briga e l'Università di Torino.

Parole chiave: classe capovolta; progettazione a ritroso; geometria; istruzione terziaria; apprendimento capovolto.

Abstract / In this article we present a teaching/learning experience based on the flipped classroom approach, integrated with a backward design. The results about students' perception are shown. The experimentation context was a Geometry and Geometry Education course, belonging to the initial training for primary school teachers, offered by the Dipartimento formazione e apprendimento of the Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana (SUPSI), based in Locarno. The results show a positive students' perception of the flipped classroom approach, with respect to its effectiveness, its comparison with the usual methodology and the appreciated aspects and the improvable ones throughout the whole course. We also deduce practical considerations about the implementation of the flipped classroom approach in the tertiary education. The research is part of a broader research project entitled *Flipped classroom as a competence based approach*, involving several SUPSI departments, and in collaboration with the Fernfachhochschule Schweiz of Brig and the University of Turin.

Keywords: flipped classroom; backward design; Geometry; tertiary education; flipped learning.

1 Premessa

In questo articolo vengono presentate e analizzate le percezioni degli studenti di un percorso didattico che ha adottato l'approccio flipped classroom, integrato con una progettazione a ritroso, nell'ambito della formazione iniziale di futuri insegnanti di scuola elementare. Esso è stato realizzato nell'a.a. 2016/2017 all'interno del corso di Geometria, appartenente al primo anno del piano degli studi del Bachelor in Insegnamento per il livello elementare, offerto dal Dipartimento formazione e apprendimento (DFA), che ha sede a Locarno (Svizzera). Tale corso fa quindi parte di una

formazione di livello terziario e di natura professionalizzante della durata di tre anni.
Il lavoro di progettazione e di implementazione del percorso si inserisce nel più ampio progetto di ricerca *Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze* (FliSCo), che ha coinvolto diversi dipartimenti della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI), in collaborazione con la Fernfachhochschule Schweiz (FFHS) e l'Università di Torino.

L'obiettivo principale del progetto FliSCo è stato quello di testare le potenzialità dell'approccio didattico flipped classroom[1] allo scopo di favorire lo sviluppo di competenze professionali nei corsi proposti in SUPSI.

Per raggiungere tale obiettivo quindici docenti e ricercatori, con competenze e ruoli differenti, si sono confrontati sui seguenti aspetti:

– necessità di adottare nei corsi una prospettiva di didattica per competenze;
– "progettazione a ritroso" come rilettura della progettazione mediante un approccio focalizzato sulla competenza da sviluppare;
– flipped classroom come approccio didattico orientato ad un ripensamento dell'ambiente di apprendimento e delle dinamiche di apprendimento.

Partendo da questo dialogo sono stati progettati e sperimentati percorsi didattici in cinque diversi corsi SUPSI, molto differenti tra loro per tematiche trattate, numero di studenti coinvolti e percorso di studio in cui erano inseriti; il corso di Geometria rappresenta uno di questi. Le sperimentazioni sono state monitorate da ricercatori tramite la raccolta di dati quantitativi e qualitativi, volti a verificare:

– la coerenza e l'efficacia della metodologia didattica flipped classroom rispetto agli obiettivi dichiarati nel corso/modulo entro cui si inserisce;
– la coerenza e l'efficacia della progettazione a ritroso rispetto agli obiettivi dichiarati nel corso/modulo entro cui si inserisce;
– la percezione (l'accoglienza) da parte di docenti e studenti di una modalità didattica innovativa che abbina un approccio di "apprendimento capovolto" con una logica di progettazione a ritroso.

È stato così possibile analizzare criticamente i punti di forza e le difficoltà relative all'adozione della progettazione a ritroso e della flipped classroom per i docenti (lato insegnamento) e per gli studenti (lato apprendimento). Le sperimentazioni effettuate e i risultati del progetto FliSCo hanno dimostrato il valore aggiunto dell'integrazione delle due prospettive, basate entrambe su un'idea di "ribaltamento" di un approccio tradizionale nel progettare, predisporre e gestire ambienti e dinamiche di insegnamento-apprendimento, nel contesto della formazione terziaria professionalizzante (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017).

In questo articolo vengono presentati i risultati della sperimentazione implementata all'interno del corso di Geometria relativi alla percezione da parte degli studenti dell'approccio flipped classroom, emersi sia dal lavoro di monitoraggio del progetto FliSCo e sia dal sondaggio istituzionale di gradimento dell'intero corso. Per poter contestualizzare tali risultati, nell'articolo viene anche descritta l'attività progettuale realizzata, che ha rappresentato un tassello importante del progetto, e il percorso didattico implementato.

1. In questo articolo, l'espressione "flipped classroom" ("classe capovolta") è utilizzata come espressione equivalente a "flipped learning" ("apprendimento capovolto"), coerentemente all'uso che se ne è fatto nell'ambito del progetto FliSCo.

2 Panoramica sull'approccio flipped classroom

La flipped classroom consiste essenzialmente nel capovolgere la dinamica didattica tradizionalmente egemone sia a scuola sia nella formazione terziaria: in aula si insegna attraverso la trasmissione dei contenuti culturali, e a casa si impara, attraverso l'appropriazione di tali contenuti culturali per mezzo dello studio e dell'esercizio. Nella flipped classroom si vuole invece ribaltare questa relazione puntando a spostare il lavoro di acquisizione dei contenuti a casa, attraverso un approccio individuale ai contenuti mediato da testi, video, audio ecc., e il lavoro di rielaborazione dei contenuti in aula, attraverso il loro impiego in contesti reali o per affrontare problemi complessi, sotto la guida del docente. Il valore aggiunto della flipped classroom risiede quindi nella possibilità di riorganizzare il tempo e lo spazio e di creare degli ambienti d'apprendimento efficaci che sostituiscono la classica "classe" (Bergmann & Sams, 2012, 2016; Cecchinato & Papa, 2016; Maglioni & Biscaro, 2014).

2.1 Il superamento della trasmissione del sapere

L'approccio flipped classroom nasce negli anni '90 soprattutto come alternativa alla pedagogia trasmissiva basata sullo schema classico: lezione frontale – studio individuale – verifica finale, che verte sulla centralità dell'insegnante e del sapere in gioco a discapito del ruolo attivo dell'allievo (De Mauro, 2012). Tale centralità ha definito anche il tradizionale setting scolastico e accademico che riscontriamo nelle aule: la cattedra dove il docente impartisce lezione trasmettendo i contenuti e i banchi disposti in file di fronte alla cattedra dove gli allievi devono sedersi e ascoltare (Cecchinato & Papa, 2016). Ciò è ben evidente nel dipinto di Laurentius de Voltolina della seconda metà del 14° secolo e riportato in Figura 1, che ritrae una lezione in un'aula dell'Università di Bologna. Un setting che rappresenta ancora oggi una delle modalità più praticate nelle scuole europee, come mostra un'indagine dell'OCSE (2008).

Figura 1
Dipinto di Laurentius de Voltolina della seconda metà del 14° secolo (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Laurentius_de_Voltolina_001.jpg).

Come sostengono Cecchinato & Papa (2016), tale impostazione didattica basata su una mera memorizzazione di nozioni e sulla passività degli studenti, non consente

un apprendimento significativo in grado di provocare un cambiamento concettuale o lo sviluppo di competenze.
Nel secolo scorso, pur essendo state diverse le proposte pedagogiche alternative a tale impostazione, molte delle quali incentrate sull'idea di apprendimento attivo – come i movimenti di Dewey della prima metà del 1900, basati sull'importanza del fare da parte degli studenti ("learning by doing"), o l'impostazione di pedagogisti come Montessori o Freinet – non vi è stato un generalizzato cambiamento nelle nostre aule (Reble, 2004).
Oggi però, con l'avvento di internet e lo sviluppo delle tecnologie digitali, si sono sviluppate pratiche di comunicazione e di interazione online che sembrano ben armonizzarsi con le pratiche pedagogiche dell'attivismo e del "learning by doing". Come sostengono diversi autori, questa rivoluzione digitale fornisce gli strumenti per modificare le pratiche didattiche trasmissive rendendole più costruttive, collaborative e sociali e rendendo le fonti della conoscenza più economiche, disponibili, varie e fondate sulla condivisione (Merlo & Caldara, 2016; Nizet, Galiano & Meyer, 2016; Bergmann & Waddell, 2012; Steed, 2012).
Nella flipped classroom l'apprendimento viene pensato come sviluppo di una competenza dove le lezioni in aula non sono più impostate sull'ascolto o sulla risoluzione di un esercizio riproduttivo o applicativo, bensì vengono dedicate a risolvere situazioni problematiche sfidanti e creative che tengono conto delle necessità degli studenti e dei loro diversi stili d'apprendimento, in un'ottica di pedagogia differenziata (Davies, Dean & Ball, 2013; Berrett, 2012; Mazur, 1997; Vastarella, 2016). Da qui la necessità di spostare la funzione formativa dell'insegnante dalla fase di trasmissione dei contenuti a quella di mobilitazione delle competenze, essendo questo il passaggio più delicato, da affrontare quindi sotto la guida di un adulto esperto. Molte delle attività che tradizionalmente avvengono all'interno dell'aula sono portate dalla flipped classroom al di fuori di essa, e viceversa (Lage, Platt & Treglia, 2000) (**Figura 2**).

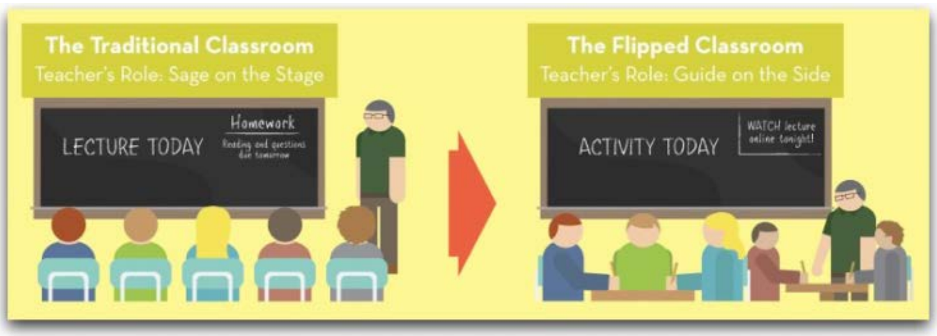


Figura 2
Dalla lezione tradizionale alla lezione flipped classroom.
Il ruolo del docente da "saggio sul palco" a "guida al fianco"; alla lavagna, da "oggi lezione" a "oggi attività" (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Flipped_Classroom.jpg).

La scuola e l'università potrebbero così cambiare il proprio ruolo, da luogo esclusivo di trasmissione della conoscenza a quello di facilitatore

> «dei processi di apprendimento, di sostegno allo sviluppo delle facoltà cognitive, di guida all'acquisizione di competenze che consentono a ogni allievo di liberare le sue potenzialità e divenire parte attiva nella società».
>
> (Cecchinato, 2012, par. VI)

2.2 Principi base della flipped classroom

Non c'è consenso su chi sia stato il primo formatore a sperimentare la flipped classroom, anche perché non si tratta di un metodo ben definito, ma piuttosto di un approccio che contiene diverse modalità didattiche di fatto già esistenti da decenni nelle pratiche di molti docenti. Come affermano Bergmann & Sams (2016, p. 19):

> «(…) la Classe Capovolta non esiste. Non c'è una metodologia da seguire o una qualche checklist pronta da usare. Capovolgere la classe è un cambio di mentalità, in cui si sposta l'attenzione dall'insegnante allo studente e all'apprendimento, e ogni insegnante lo fa in modo diverso».

Sono molti i pionieri citati in letteratura: King (1993), Mazur (1997), Lage, Platt e Treglia (2000), Bergmann e Sams (2012). Per un approfondimento si veda Negrini (2017). La flipped classroom rappresenta quindi oggi l'assemblaggio di diverse pratiche didattiche esistenti già da diversi decenni, favorite soprattutto dallo sviluppo e dalla diffusione massiccia delle nuove tecnologie, che permettono la registrazione e la diffusione capillare di contenuti a costi estremamente bassi (Bishop & Verleger, 2013; Nizet et al., 2016).

Per contrastare la tendenza ad una visione semplicistica della flipped classroom, del tipo "teoria a casa e compiti a scuola", ed evitare fraintendimenti comuni, il Flipped Learning Network, un gruppo composto da educatori esperti che hanno sperimentato la flipped classroom, ha tentato di stabilire i principi base di quest'approccio didattico e di formularne una definizione ufficiale.
Come primo passo sono state distinte le due espressioni "flipped classroom" e "flipped learning", entrambe utilizzate in letteratura. Secondo gli educatori del Flipped Learning Network capovolgere la classe non porta automaticamente a capovolgere anche l'apprendimento. Molti docenti probabilmente capovolgono già la classe, dando per esempio delle letture da svolgere a casa, questo però non è sufficiente per poter parlare anche di apprendimento capovolto. Con il termine "apprendimento capovolto" il Flipped Learning Network intende:

> «(…) un approccio pedagogico in cui l'istruzione diretta si sposta dallo spazio di apprendimento di gruppo allo spazio di apprendimento individuale, e il risultante spazio di gruppo è trasformato in un ambiente d'apprendimento dinamico, interattivo, dove l'educatore guida gli studenti mentre loro applicano i concetti e s'impegnano creativamente nella materia».
>
> (Flipped Learning Network, 2014, p. 1)

La flipped classroom va quindi intesa in questo lavoro come un approccio in grado di favorire un apprendimento capovolto ed è questo il motivo che ci ha spinti ad utilizzare queste due espressioni come sinonimi.

Oltre alla definizione di flipped learning, il Flipped Learning Network ha definito anche alcuni principi da seguire per chi volesse adottare un approccio capovolto, chiamati anche "i quattro pilastri" dell'apprendimento capovolto, che sono stati racchiusi nell'acronimo "FLIP" (Flipped Learning Network, 2014, https://flippedlearning.org/):

- Flexible environment (ambiente flessibile): l'apprendimento capovolto permette una varietà di metodologie di apprendimento; gli insegnanti spesso ristrutturano il loro ambiente di apprendimento per realizzare una lezione o una unità di lavoro, in modo da favorire sia il lavoro di gruppo sia lo studio individuale. Essi creano spazi flessibili in cui gli studenti possano scegliere quando e dove apprendere. Inoltre gli insegnanti che capovolgono le loro classi diversificano le proprie aspettative sui tempi di lavoro dei loro studenti e le modalità di accertamento degli apprendimenti.

– Learning culture (cultura dell'apprendimento): nel modello tradizionale l'insegnante è la fonte primaria di informazioni. Al contrario il modello di apprendimento capovolto orienta deliberatamente l'istruzione verso un approccio centrato sullo studente, dove il tempo in classe è prevalentemente dedicato all'esplorazione approfondita e alla creazione di opportunità di approfondimento più ricche. Ciò porta gli studenti ad essere più attivamente coinvolti nella costruzione della conoscenza, partecipando e valutando il loro processo di apprendimento in modi adatti alle loro attitudini personali.
– Intentional content (intenzionalità formativa): gli insegnanti sono sollecitati a pensare le modalità più adatte per usare il modello di apprendimento capovolto allo scopo di aiutare gli studenti a sviluppare una comprensione profonda. Essi decidono su quali temi centrare l'attenzione e quali materiali gli studenti possono affrontare individualmente. Sulla base delle loro intenzionalità formative, gli insegnanti ottimizzano il tempo in classe attraverso metodologie centrate sugli studenti e strategie attive di apprendimento adatte al livello d'età e alla disciplina di insegnamento.
– Professional educator (competenza professionale): il ruolo professionale dell'insegnante è ancor più importante e necessario in una classe capovolta rispetto ad una tradizionale. Durante il tempo in aula gli insegnanti sono chiamati ad osservare continuamente i loro studenti, fornendo feedback significativi e tempestivi e valutando il loro lavoro. Ciò richiede loro di essere riflessivi nella loro azione, aggiornare la loro formazione, accettare critiche costruttive e tollerare situazioni di "disordine" nelle loro classi. Sebbene gli insegnanti assumano un ruolo apparentemente meno centrale in una classe capovolta, essi rimangono il fattore decisivo per rendere efficace l'apprendimento capovolto.

Per ogni pilastro sono stati inoltre declinati operativamente 11 indicatori (lista di controllo) che i docenti intenzionati a capovolgere la propria classe possono usare per monitorare e auto-valutare il proprio lavoro (Flipped Learning Network, 2014):

AMBIENTE FLESSIBILE	– stabilire spazi e scansioni temporali che permettano agli studenti di interagire e riflettere sul loro apprendimento; – osservare e monitorare costantemente gli studenti in modo da adattare e regolare la proposta formativa; – fornire differenti opportunità agli studenti per apprendere i contenuti e dimostrarne la padronanza.
CULTURA DELL'APPRENDIMENTO	– assicurare agli studenti occasioni per impegnarsi in attività significative che non prevedano la centralità dell'insegnante; – supportare queste attività e renderle accessibili a tutti gli studenti attraverso la differenziazione e il feedback.
INTENZIONALITÀ FORMATIVE	– focalizzarsi sui concetti chiave delle discipline di insegnamento facendo in modo che gli studenti possano accedervi in autonomia; – creare e/o selezionare contenuti significativi (tipicamente in forma audiovisiva) per i propri studenti; – differenziare per rendere accessibili e rilevanti i contenuti proposti per tutti gli studenti.
COMPETENZA PROFESSIONALE	– fornire feedback individuali, di piccolo gruppo, di classe in tempo reale in base alle necessità; – condurre valutazioni formative in itinere durante le lezioni attraverso l'osservazione e la documentazione di dati utili al prosieguo del lavoro formativo; – collaborare e riflettere con gli altri docenti assumendosi la responsabilità del proprio sviluppo professionale.

3 Breve stato dell’arte e ricerche sulla percezione

Il successo dell’approccio flipped classroom e la sua rapida diffusione a livello globale è certamente dovuto ai seguenti due aspetti: l’esigenza avvertita da molti docenti di cambiare le pratiche didattiche “tradizionali” e la possibilità di accedere a strumenti di condivisione Web sempre più alla portata di tutti. Come già riportato in precedenza, l’intento dei docenti è di liberarsi dalla trasmissione dei contenuti durante le lezioni allo scopo di proporre occasioni di apprendimento più significative e offrendo agli studenti la possibilità di apprendere i contenuti al di fuori dell’aula al loro ritmo personale e di accedere alle informazioni quando e dove vogliono (Newmann, Jun-Hyun, Jung Lee, Brown & Huston, 2016).
Malgrado questo diffuso interesse, solo recentemente la comunità scientifica ha iniziato ad occuparsi di questo approccio più intensamente (soprattutto negli ambiti di insegnamento terziario e secondario), come dimostra il numero di pubblicazioni sull’argomento, che sono aumentate in modo esponenziale negli ultimi cinque anni[2] e che hanno coinvolto una vastissima gamma di discipline. Menzioniamo per esempio gli studi sperimentali su corsi di economia (Balaban, Gilleskie & Tran, 2016; Calimeris & Sauer, 2015), di comunicazione multimediale (Enfield, 2013), di pedagogia (Nizet & Meyer, 2014), di ingegneria (Foertsch, Moses, Strikwerda & Litzkow, 2002), di matematica, statistica e algebra (Muir, 2017; Davies, Dean & Ball, 2013; McGivney-Burelle & Xue, 2013; Strayer, 2012), di farmacologia (Pierce & Fox, 2012), di scienze infermieristiche (Missildine, Fountain, Summers & Gosselin, 2013), di storia dell’architettura (Newmann et al., 2016) o di psicologia (Little, 2015).
Nella maggior parte degli studi pubblicati le attività di ricerca sono finalizzate alla rilevazione delle percezioni soggettive degli studenti riguardo alla flipped classroom, utilizzando spesso un disegno di ricerca basato su un singolo campione di studenti (Bishop & Verleger, 2013). Gli autori mettono perciò in evidenza due lacune metodologiche degli studi sul tema: da una parte vi è la carenza di lavori che utilizzino indicatori oggettivi di efficacia dell’approccio sull’apprendimento, come ad esempio i voti o le percentuali di successo agli esami finali; dall’altra, i disegni di ricerca si configurano piuttosto come studi a gruppo singolo o studi di caso. Come osserva anche Raffaghelli (2017), sono infatti ancora pochi gli studi empirici che fanno confronti con un approccio “non-flipped”. Inoltre, nella stessa ricerca l’autrice esamina 17 articoli di review sul tema e conclude che chi adotta metodologie di ricerca più rigorose risulta molto cauto nella valutazione dell’impatto dell’approccio sulle dinamiche di insegnamento-apprendimento, mentre gli altri tendono ad assumere posizioni più entusiaste. Va anche considerato che le implementazioni dell’approccio flipped classroom descritte nelle diverse ricerche risultano molto diverse l’una dall’altra e questo rende difficile la comparazione dei risultati (Nizet et al., 2016).
Malgrado queste limitazioni, non mancano studi molti interessanti in questo settore di ricerca.
In ambito terziario, ad esempio, Abeysekera e Dawson (2015) costruiscono una convincente argomentazione teorica rileggendo l’approccio alla luce di due teorie peda-

2. La ricerca dell’espressione “flipped classroom” sulla banca dati eric.ed.gov restituisce 413 articoli in lingua inglese sul tema negli ultimi cinque anni (dal 2014 ad oggi). Gli articoli presenti pubblicati dal 1999 al 2013 sono invece solo 31. La stessa ricerca sull’espressione “flipped learning” restituisce 106 articoli pubblicati dal 2014 ad oggi e solo 5 dal 1999 al 2013 (ricerche effettuate il 14.03.2018).

gogiche: la teoria dell'autodeterminazione (Deci & Ryan, 2008) e la teoria del carico cognitivo (Clark, Nguyen & Sweller, 2005). A partire dalla prima, gli autori sostengono che l'approccio flipped classroom, in quanto promotore dei sensi di competenza, di relazione e di autonomia degli studenti, potrebbe aumentare la loro motivazione sia intrinseca sia estrinseca. Riguardo alla seconda, gli autori sostengono che l'approccio potrebbe aiutare l'apprendimento attraverso una migliore gestione del carico cognitivo, favorita dalla possibilità di seguire le lezioni registrate al proprio passo. Nella stessa direzione, andrebbero i benefici dell'opportunità fornita dall'approccio di differenziare l'insegnamento, che può essere messa a frutto predisponendo materiale "su misura" per gli studenti da svolgere a casa e, in base al riscontro avuto su questo, pianificare il lavoro in aula, così da rispettare i reali bisogni degli allievi.
Nel settore ancora più specifico della formazione insegnanti in ambito matematico, alle autrici risulta pubblicata al momento solo la ricerca di Prodromou (2017). Questa è stata condotta nell'ambito di un corso online, con tutorial interattivi che garantivano interazioni sincrone tra studenti e tra studente e docente. Prodromou rileva che gli insegnanti in formazione hanno apprezzato la possibilità di fruire al proprio passo del materiale predisposto per lo studio individuale e hanno partecipato a ricche discussioni matematiche.

In generale, molte delle ricerche che si sono concentrate sulle percezioni dell'approccio flipped classroom da parte degli allievi hanno rilevato un aumento della motivazione, dell'impegno, del coinvolgimento e del senso di autoefficacia.
Muir (2017), nel suo lavoro sperimentale in ambito secondario, riporta un aumento del coinvolgimento degli studenti nello studio della matematica dovuta all'approccio. Uno studio condotto da Amresh, Carberry e Femiani (2013) ha mostrato come la flipped classroom abbia un impatto positivo sulla dimensione di autoefficacia degli studenti rispetto all'oggetto della didattica, oltre che sui punteggi ottenuti agli esami. Alcuni studi condotti nell'area sanitaria mettono in luce l'efficacia dell'approccio flipped classroom su indicatori soggettivi come la soddisfazione per la metodologia stessa (Street, Gilliland, McNeill & Royal, 2015) o l'auto-percezione di un miglioramento nell'apprendimento (McLaughlin et al., 2014). Sempre in area sanitaria, Moffett e Mill (2014) hanno utilizzato un disegno di ricerca quasi sperimentale, mettendo a confronto studenti che avevano frequentato un corso interamente "tradizionale" e studenti che avevano frequentato un corso interamente "rovesciato", nella stessa materia. I risultati hanno messo in evidenza una preferenza degli studenti per l'approccio flipped classroom rispetto a quello tradizionale, ma non una performance migliore dei primi rispetto ai secondi.
Non mancano studi che hanno anche rilevato elementi di criticità dell'approccio per studenti e docenti. Ad esempio, la mancanza della presenza fisica del docente al quale rivolgere domande e chiedere chiarimenti durante le fasi di acquisizione di contenuti a casa, può essere vissuta in modo negativo da parte di alcuni studenti, che affermano di essersi sentiti abbandonati (Strayer, 2012). Per quanto riguarda le attività in classe, invece, non tutti gli studenti accolgono positivamente l'invito a una partecipazione attiva. Quest'ultima, come afferma Mangan (2013), rischia di non essere apprezzata dagli studenti abituati ad un apprendimento basato sulla memorizzazione di nozioni e a una presenza passiva in aula, generando una possibile avversione verso la flipped classroom. Un'analoga considerazione appare anche in Missildine et al. (2013), in cui si sostiene che sebbene l'approccio possa avere un effetto positivo sull'apprendimento, non è detto che venga apprezzato da tutti gli studenti.

4 Domanda di ricerca

La percezione dell'approccio flipped classroom da parte degli studenti è stata una delle tematiche di indagine del progetto FliSCo; da essa deriva la domanda di ricerca che ha guidato questo lavoro:
Come è percepito da parte degli studenti un percorso didattico con approccio flipped classroom in ambito matematico per la formazione insegnanti?

5 Aspetti metodologici

5.1 Contesto di sperimentazione

La sperimentazione si è svolta nel corso teorico di Geometria, rientrante nel modulo "Matematica I: fondamenti di didattica della Geometria". Si tratta di un corso a grande gruppo che ha visto la partecipazione di 74 studenti e prevede 24 ore lezione da 50 minuti, distribuite su 12 incontri settimanali, realizzate da settembre a dicembre 2016.
I contenuti del corso rientrano nei saperi epistemologici, disciplinari e di didattica della matematica relativi all'ambito geometrico. Più nello specifico, vengono trattati il linguaggio necessario per situarsi e muoversi nello spazio, le nozioni fondamentali della geometria e le principali figure del piano e dello spazio, con i loro elementi costitutivi e le loro proprietà.
L'approccio flipped classroom è stato sperimentato in un segmento del corso pari a 8 ore lezione (un terzo delle ore complessive), dall'ottavo all'undicesimo incontro, durante i mesi di novembre e dicembre, lasciando le prime sette lezioni e l'ultima in modalità "tradizionale".[3] 3

5.2 Progettazione "a ritroso" del percorso

Per coerenza con l'analisi che sarà effettuata – sulla percezione dell'approccio flipped classroom da parte degli studenti – in questo articolo si riportano solo alcuni aspetti salienti dell'attività progettuale relativa al percorso di Geometria, che ha rappresentato un elemento importante dell'indagine sperimentale; per un approfondimento in tal senso si veda (Carotenuto, Castoldi & Sbaragli, 2017).
La progettazione didattica che di solito viene implementata in ambito terziario è di tipo tradizionale: parte dalla strutturazione degli interventi didattici e lascia le questioni valutative come atto finale. Nel progetto FliSCo si è invece partiti dall'assunto che un approccio orientato verso le competenze debba *ribaltare* tale logica, dando maggiore attenzione al traguardo da raggiungere e all'aspetto valutativo. Per questo si è scelto di adottare il quadro operativo della "progettazione a ritroso" proposto da Wiggins e McTighe (2004) e da loro denominata "backward design". In tale costrutto teorico, i due autori suggeriscono ai docenti di riflettere innanzitutto sulla

3. Per "tradizionale" si intende la modalità considerata abituale per la docente del corso, che prevede anch'essa, indipendentemente dall'approccio flipped classroom, un'interazione continua tra allievi e docente.

competenza che si intende sviluppare, selezionata sulla base del profilo dello studente atteso in uscita dalla formazione, e di analizzarla attraverso l'identificazione delle dimensioni prevalenti che concorrono alla sua manifestazione, determinando così le più opportune azioni di valutazione; solo dopo questi passaggi si può procedere alla pianificazione delle singole attività didattiche (Castoldi, 2011). La progettazione a ritroso garantisce perciò una profonda coerenza tra i risultati di apprendimento desiderati, le prestazioni fondamentali degli studenti e gli interventi didattici che si mettono in atto.
Nel seguito si presenta brevemente il percorso progettuale intrapreso.

Primo passo. La progettazione è iniziata con una riflessione sugli obiettivi del modulo nel quale è inserito il corso e sul profilo del piano degli studi del Bachelor,[4] che ha portato all'individuazione del traguardo di competenza focus del percorso didattico: *Sapere comunicare concetti geometrici fondamentali relativi alle figure del piano, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica*.[5] Si tratta di una competenza di fondamentale rilevanza per i futuri docenti di scuola elementare, la cui acquisizione nasconde diverse difficoltà sia concettuali sia linguistiche, che spesso vengono sottovalutate da studenti e formatori.
Successivamente si è passati a determinare i bisogni formativi degli allievi rispetto all'ambito tematico selezionato e a elaborare le domande chiave attraverso cui interrogare i contenuti formativi (tavola dell'idea progettuale, Allegato 1).

Si è poi definita la situazione problema (Castoldi, 2011), intesa come fulcro intorno al quale si sviluppa l'intero percorso progettuale, in quanto occasione per mobilitare l'insieme delle risorse, interne ed esterne, di cui l'allievo dispone in rapporto al traguardo di competenza focus e prodotto verso cui orientare il lavoro progettuale.
La situazione problema scelta è la seguente:
Comunicare in modo pertinente ed efficace concetti e proprietà relative all'ambito delle figure del piano in situazioni ludo-geometriche (cruciverba geometrico, schiena contro schiena, Taboo geometrico) tenendo conto dei vincoli imposti dai giochi, delle esigenze comunicative e, contemporaneamente, delle caratteristiche specifiche del linguaggio matematico.
Le attività ludo-geometriche sono state pensate per attivare la competenza focus in un contesto significativo di tipo ludico. Questa proposta, oltre a favorire il coinvolgimento degli allievi, prefigura una possibile situazione didattica che gli studenti possono sperimentare in ambito scolastico (Figure 3-5).

4. Il Piano degli studi e il prospetto del profilo delle competenze in uscita del Bachelor of Arts in Insegnamento per il livello elementare, per l'a.a. 2016/2017, sono entrambi disponibili in http://www.supsi.ch/dfa/bachelor-diploma-master/bachelor/insegnamento-elementare/piani-studio/piani-di-studio.html
5. Le figure dello spazio erano già state trattate nella prima parte del corso.

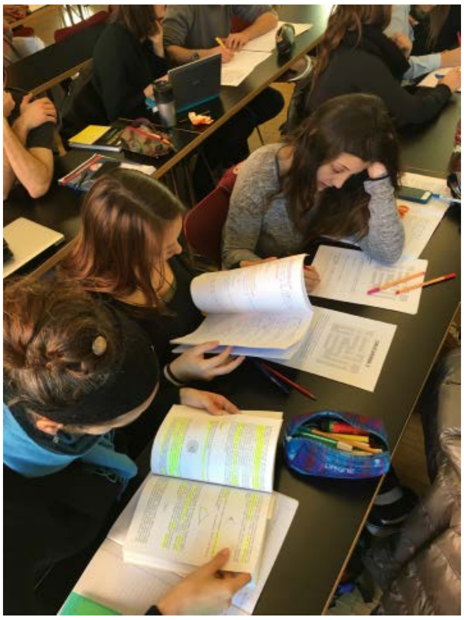


Figura 3,4 e 5
Foto inerenti la realizzazione della situazione problema. A sinistra, formulazione delle definizioni del *cruciverba geometrico*; a destra in alto, attività *schiena contro schiena*; a destra in basso, attività del *Taboo geometrico*.

Secondo passo. Il secondo passo dell'attività progettuale ha previsto una macro-pianificazione dell'azione valutativa, che è stata poi definita nel dettaglio nella fase successiva. Si premette che le particolari condizioni del contesto formativo, corso teorico a grande gruppo del primo semestre del primo anno di formazione, che ha coinvolto 74 studenti, consentono sì un'azione *valutativa continua e formativa, ma che risulta prevalentemente collettiva o realizzata tra pari*. Nonostante questo limite, una tale azione valutativa, volta all'identificazione delle difficoltà e dei bisogni degli allievi, permette di orientare in itinere l'azione didattica del docente e la riflessione di ciascuno studente. La valutazione sommativa degli apprendimenti dei singoli, invece, è stata inglobata in un esame scritto formato da alcune domande a risposta chiusa e altre a risposta aperta, volte a indagare le capacità di sapere comunicare e argomentare in geometria. Questa scelta è stata imposta dal Piano di studio Bachelor che era già in vigore all'interno dell'Istituzione per l'anno accademico in corso.
Sono stati ipotizzati numerosi interventi valutativi da integrare nelle varie attività didattiche che si sarebbero progettate: consegna dei prodotti degli studenti realizzati a casa tramite la piattaforma *Moodle iCorsi*, a cui far seguire una restituzione collettiva in aula o su piattaforma da parte della docente; controlli cognitivi tramite quiz individuali, da inserire su piattaforma, del lavoro realizzato a casa (Allegato 2) o da realizzare in tempo reale nelle attività in aula attraverso i *clicker* (Allegato 3); riflessione auto-valutativa da svolgere individualmente a metà percorso, guidata dalle seguenti tre voci: "cose che vorrei capire meglio", "cose che ho imparato da questo lavoro" e "cose che già sapevo ma che ora ho capito meglio" (Castoldi, 2016) (Allegato 4); utilizzo in aula della metodologia di valutazione formativa del *semaforo*, in cui agli studenti è richiesto di riconoscere durante un'attività se sentono di procedere bene, di aver bisogno di un aiuto da parte del docente o di essere bloccati nel lavoro (Franchini, Salvisberg & Sbaragli, 2016); risposte ai dubbi, alle sollecitazione e alle domande degli studenti che nascono dallo studio a casa o dalle attività in classe; continui feedback sulle attività svolte in aula; infine, per supportare la riflessione metacognitiva sul processo previsto dalla competenza focus durante la realizzazione della situazione problema (o partita), è stata ipotizzata una rubrica di valutazione tra pari (Allegato 5), sulla quale si è prevista una fase di restituzione collettiva.

Si riporta in allegato uno schema degli strumenti valutativi preparato in questa fase di progettazione, tenendo conto dei tre aspetti: "Cosa so fare" (analisi delle prestazioni degli allievi), "Come mi vedo" (autovalutazione) e "Come mi vedono" (osservazione del docente e valutazione tra pari) (Allegato 6).

Terzo passo. Nell'ultima fase della progettazione sono stati strutturati gli interventi, tenendo conto delle seguenti quattro componenti dell'articolazione operativa di una situazione problema, rispetto alle quali riportiamo tra parentesi le domande guida per il docente: condivisione di senso ("Come 'agganciare' gli allievi nel percorso che si vuole intraprendere?"), allenamento ("Come sviluppare la competenza focus?"), partita ("Come affrontare la situazione problema?") e riflessione ("Quali occasioni di riflessione sul processo e sui prodotti?"). Uno schema dell'articolazione formativa è riportato in Allegato 7.
In questa fase si è riflettuto molto sull'implementazione dei principi chiave dell'approccio flipped classroom.

5.3 Il percorso

In questo paragrafo si fornisce una sintetica descrizione di natura metodologica del percorso didattico implementato; per un resoconto accurato con il dettaglio delle singole attività che hanno caratterizzato il lavoro a casa e quello in aula si rimanda a (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017, pp. 67-85).

L'approccio flipped classroom è stato presentato agli studenti già nella prima lezione del corso di Geometria che si è svolta all'inizio di settembre, spiegando che il corso sarebbe stato oggetto di sperimentazione e che questa metodologia sarebbe stata adottata nei mesi di novembre e dicembre. Si è ritenuto importante illustrare i suoi principi fondamentali, allo scopo di fare emergere i possibili vantaggi che la sua introduzione avrebbe potuto apportare e motivare in questo modo gli studenti in vista del percorso che avrebbero intrapreso nei mesi successivi. È stata anche suggerita la visione di un fumetto animato sul tema (link).

Il percorso ha previsto tre periodi di lavoro a casa, che sono stati seguiti da altrettanti incontri in aula, più una lezione conclusiva, in cui è stata affrontata la partita. Per quanto riguarda la durata di ciascuno dei tre periodi di attività fuori dall'aula, il primo è stato di circa un mese, coincidente con la pausa dedicata alla pratica professionale a scuola degli studenti, il secondo di cinque giorni e infine il terzo di quattro giorni.
Tutte le attività sono state rese fruibili attraverso la piattaforma online *iCorsi*, utilizzando diversi dei suoi strumenti. In particolare, lo strumento *Libro* ha fatto da contenitore a ciascuno dei tre gruppi di consegne. La sua struttura a pagine ha risposto bene alle esigenze di progettazione che prevedevano, per ciascuna consegna, la visione di un video su un tema specifico, della durata di 20-25 minuti, accompagnata da attività che stimolassero la riflessione sui suoi contenuti e l'approfondimento di alcuni aspetti specifici. La maggior parte delle pagine virtuali dei libri *iCorsi* realizzati contengono, infatti, un breve frammento di video, seguito da una o più consegne ad esso relative. Le proposte fatte agli studenti per il lavoro a casa risultano in linea con quello che Lebrun (2016) considera il livello 2 di flipped classroom: si è scelto infatti di coinvolgere gli studenti con attività di esplorazione, le cui scoperte sareb-

bero state successivamente condivise in classe. Gli strumenti multimediali utilizzati per la creazione delle attività su piattaforma sono stati di vario genere: file di testo (articoli di ricerca, schede, estratti di libri), quiz multimediali *iCorsi*, link web, quaderni *Cabri*.[6] I video consistono in registrazioni di presentazioni Keynote appositamente 6
predisposte (**Figure 6** e **7**), il cui audio con la voce della docente è stato catturato con un microfono.

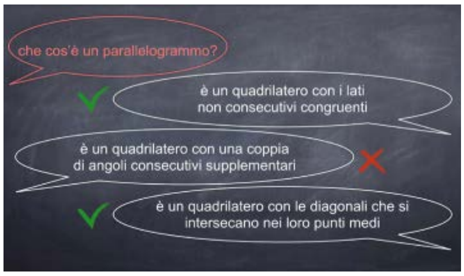


Figura 6 e 7
Immagini tratte dai video realizzati.

Il contenuto dei video è ispirato al libro *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*, di Fandiño Pinilla e Sbaragli (2011), sia per la selezione degli argomenti nell'ambito tematico del percorso, sia per la scelta di adottare un linguaggio informale.
Tutte le attività, fatta eccezione per quelle di visione dei filmati e di lettura di articoli o estratti di libri, hanno previsto la restituzione da parte degli studenti di un file attraverso la funzione *Compito* di *iCorsi*. Ciò ha permesso alla docente e collaboratrici di avere un controllo sul lavoro svolto a casa dagli studenti, ma soprattutto di restituire un feedback durante gli incontri in aula, in ottica di valutazione formativa e valorizzazione del lavoro a casa, e di apportare modifiche alla progettazione delle lezioni.
Ogni lezione, fatta eccezione per l'ultima che è stata dedicata alla partita, è cominciata con una ripresa da parte della docente dei contenuti teorici e delle attività esplorati a casa. Per farlo sono state scelte diverse modalità, prevedendo sempre uno spazio di interazione con gli studenti, per rispondere alle loro richieste di chiarimenti e di feedback sul lavoro svolto a casa. Questi momenti iniziali sono stati dedicati anche ad approfondimenti teorici e pratici, in cui si è data particolare rilevanza agli aspetti relativi alla trasposizione didattica dei saperi in gioco.
La parte più consistente degli incontri è stata invece dedicata allo svolgimento di attività laboratoriali in piccoli gruppi. Durante tali attività la docente ha sia assunto il ruolo di tutor, supportando tra i banchi il lavoro dei vari gruppi, allo scopo di dare suggerimenti e chiarire dubbi, sia orchestrato le fasi di discussione collettiva, in cui gli studenti hanno condiviso strategie e risultati (**Figure 8 – 10**).

6. *Cabri* è un software che permette la creazione di attività per lo studio della matematica, utilizzato in Canton Ticino nella scuola dell'infanzia e nella scuola elementare (http://www.e-sco.ch/CE/Home.html). Le attività realizzate attraverso il software, ad opera di docenti ed esperti della didattica della matematica, sono dette *quaderni*, per via della loro struttura in schermate sequenziali. La scelta di proporre all'interno del percorso quaderni *Cabri*, opportunamente modificati per rispondere alle esigenze formative degli insegnanti in formazione, è motivata da una duplice intenzione. In primo luogo, si volevano impegnare a casa gli studenti in attività di tipo laboratoriale, utilizzando canali differenti; inoltre, si desiderava che gli studenti prendessero contatto con il software, che potrebbe rivelarsi un valido strumento per la loro futura attività professionale.

Come già anticipato, durante tutto il percorso, sia nelle fasi di lavoro a casa sia negli incontri in aula, sono stati previsti dei momenti dedicati alla valutazione, adottando diversi strumenti.

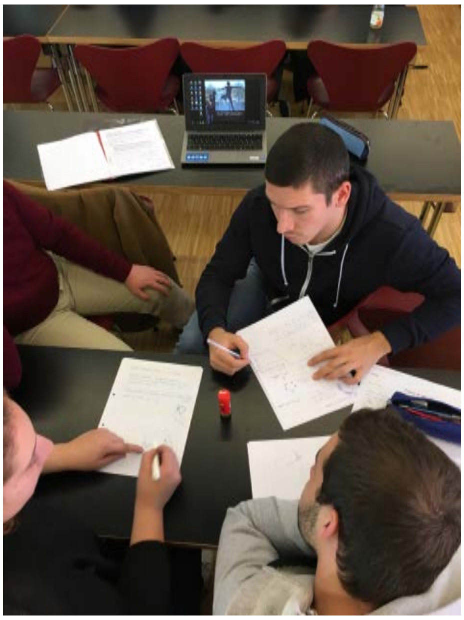


Figura 8,9 e 10
Immagini di incontri in aula.

5.4 Strumenti di raccolta dati

I dispositivi di ricerca progettati e implementati nel progetto FliSCo, da parte di ricercatori non implicati nella sperimentazione didattica, risultano assai ampi e vari e si basano su alcune dimensioni di analisi delle esperienze che hanno coinvolto trasversalmente tutti i corsi per l'intera durata del progetto (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017); tra queste vi è anche la percezione dell'approccio flipped classroom da parte degli studenti, oggetto di questo articolo.
In particolare, per sondare la percezione dell'esperienza da parte degli studenti, oltre all'osservazione in aula da parte di un ricercatore, sono stati somministrati quattro questionari online in diverse fasi del percorso: un questionario di raccolta dei dati preliminari, due di monitoraggio delle attività, rispettivamente a casa e in classe, e

un ultimo di bilancio sul percorso che si era appena concluso.
In questo articolo si è scelto di concentrare l'attenzione su alcune parti del questionario finale (Allegato 8), maggiormente centrate sulla tematica oggetto di valutazione. Il questionario era online, anonimo, facoltativo ed è stato compilato da 49 studenti su 74.
Viene considerata la batteria di domande volta a valutare l'efficacia percepita in relazione al proprio apprendimento delle seguenti tredici tipologie di attività proposte durante il percorso: attività a casa (online); attività in aula; video delle lezioni online; quiz/esercizi di autovalutazione; studio di materiale didattico a casa (articoli, capitoli di libri, slides); risoluzione di problemi concreti a casa; compiti/esercizi svolti in classe; lezioni in presenza; lavori di gruppo in classe; valutazioni formative da parte del docente; autovalutazione; valutazione fra pari; forum di discussione.
Inoltre, viene analizzata la batteria di domande legata alla comparazione tra la metodologia "tradizionale" e quella flipped classroom basata sulle seguenti otto dimensioni: uso efficace del tempo; acquisizione di concetti disciplinari; acquisizione di competenze trasversali; qualità delle interazioni con il docente; qualità delle interazioni con i compagni; coinvolgimento personale; efficacia generale del corso; gradevolezza.

Viene inoltre considerato il sondaggio istituzionale di gradimento dell'intero corso di Geometria predisposto in modo coordinato da tutti i dipartimenti della SUPSI. Il sondaggio è stato effettuato a corso ultimato e prima dell'esame finale e ha coinvolto 67 studenti attraverso un test individuale, anonimo, cartaceo, somministrato in aula in assenza della docente.
Il test era diviso in quattro sezioni, di cui le prime tre erano composte da domande a risposta chiusa, riguardanti gli ambiti "Pianificazione e organizzazione", "Attività di insegnamento-apprendimento" e "Apprezzamento complessivo", e la quarta era invece dedicata alla raccolta delle osservazioni degli studenti. Quest'ultima era costituita dalle seguenti domande a risposta aperta, con relativa richiesta di argomentazione:

1. *Che cosa hai particolarmente apprezzato del corso? Motiva le tue scelte.*
2. *Quali pensi siano gli aspetti da migliorare del corso e in che modo? Motiva le tue scelte.*

Ai fini della nostra ricerca, sono state analizzate le risposte date nell'ultima sezione, dalle quali era possibile selezionare quelle che si riferivano con certezza alla parte di corso interessata dall'approccio flipped classroom.

6 Risultati di ricerca

Si riportano di seguito i risultati ottenuti sull'accoglienza da parte degli studenti dell'approccio flipped classroom dal monitoraggio del progetto FliSCo[7] e dal sondaggio di gradimento istituzionale. 7

7. Si ringrazia Luciana Castelli, ricercatrice per il monitoraggio del progetto FliSCo, per aver condiviso con le autrici questi risultati.

6.1 Risultati dal monitoraggio del progetto FliSCo

Efficacia delle attività. Agli studenti è stato chiesto di rispondere alla seguente domanda:
Secondo te le seguenti attività sono state efficaci per il tuo apprendimento? Esprimi il tuo giudizio su una scala da 1 a 7, dove 1 indica "per nulla EFFICACE" e 7 indica "molto EFFICACE"?
I numeri delle occorrenze dei giudizi raccolti su ciascun tipo di attività sono riportati nella Tabella 1, dove con l'etichetta "Per nulla efficace" sono indicati i giudizi 1 e 2, con "Mediamente efficace" i giudizi da 3 a 5, e infine con "Molto efficace" i giudizi 6 e 7:

	NUMERI DI OCCORRENZE PER TIPOLOGIA DI GIUDIZIO				
TIPOLOGIE DI ATTIVITÀ	PER NULLA EFFICACE	MEDIA-MENTE EFFICACE	MOLTO EFFICACE	ATTIVITÀ NON SVOLTA / NON SO RISPONDERE	NUMERO RISPOSTE MANCANTI
ATTIVITÀ A CASA/ONLINE	5	19	24	1	0
ATTIVITÀ IN AULA	5	23	21	0	0
VIDEO LEZIONI	3	13	31	1	1
QUIZ DI AUTO-VALUTAZIONE	11	30	8	0	0
STUDIO DI MATE-RIALI DIDATTICI A CASA	3	24	20	2	0
RISOLUZIONE DI PROBLEMI A CASA	4	23	17	5	0
ESERCIZI IN CLASSE	4	21	24	0	0
LEZIONI IN PRESENZA	3	21	22	3	0
LAVORI DI GRUPPO IN CLASSE	4	22	21	2	0
VALUTAZIONI FORMATIVE (DOCENTE)	12	18	10	9	0
AUTO-VALUTAZIONE	12	25	6	5	1
VALUTAZIONE FRA PARI	7	26	9	7	0
FORUM DI DISCUSSIONE	15	17	7	10	0

Tabella 1
Valutazione degli studenti riguardo all'efficacia per l'apprendimento delle tipologie di attività adottate con l'approccio flipped classroom.

Le tipologie di attività su cui è prevalso il giudizio "molto efficace" sono state:
– i video delle lezioni online (31 studenti);

– le attività a casa/online (24 studenti);
– gli esercizi svolti in classe (24 studenti);
– le lezioni in presenza (22 studenti).

Sulle restanti tipologie è prevalso il giudizio "mediamente efficace". Si può quindi affermare che le attività scelte per implementare l'approccio flipped classroom sono state globalmente valutate positivamente rispetto alla loro efficacia.

Invece, le tipologie di attività in cui le occorrenze del giudizio "per nulla efficace" hanno superato la soglia del 20% sono state: le interazioni attraverso il forum di discussione su piattaforma (15 studenti) e le diverse tipologie di attività valutative adottate, fatta eccezione per la valutazione tra pari: le valutazioni formative da parte della docente (12 studenti), le autovalutazioni (12 studenti) e i quiz di autovalutazione (11 studenti). Il risultato sulla scarsa efficacia ai fini dell'apprendimento dello strumento forum risulta in linea con l'utilizzo che se ne è fatto: esso è stato usato quasi esclusivamente dalla docente per dare informazioni e non dagli studenti, che per dubbi e chiarimenti hanno preferito porre domande direttamente all'insegnante durante l'incontro settimanale. Interessante è inoltre il dato sulle attività di valutazione, confermato da alcuni commenti degli studenti che a lezione hanno dichiarato di essere poco abituati a riflettere sui propri apprendimenti e di non ritenere particolarmente efficace l'adozione di pratiche autovalutative.

Comparazione tra metodologia "tradizionale" e approccio flipped classroom. Agli studenti è stato proposto di confrontare la metodologia "tradizionale" e l'approccio flipped classroom, rispondendo alla seguente domanda:
Comparando la metodologia didattica tradizionale e quella sperimentata nelle ultime lezioni, come le valuteresti in relazione ai seguenti aspetti? Assegna ad ognuno un punteggio da 1 a 7, dove 1 corrisponde a "pessima" e 7 corrisponde a "eccellente".
I valori medi delle valutazioni espresse rispetto agli otto aspetti considerati sono mostrati nella Tabella 2.

	METODOLOGIA TRADIZIONALE	APPROCCIO FLIPPED CLASSROOM
USO EFFICACE DEL TEMPO	4,63	4,79
ACQUISIZIONE DI CONCETTI DISCIPLINARI	4,81	5,44
ACQUISIZIONE DI COMPETENZE TRASVERSALI	4,79	4,44
QUALITÀ DELLE INTER-AZIONI CON IL DOCENTE	4,85	4,21
QUALITÀ DELLE INTERA-ZIONI CON I COMPAGNI	4,85	4,31
COINVOLGIMENTO PERSONALE	4,33	5,15
EFFICACIA GENERALE DEL CORSO	4,90	5,27
GRADEVOLEZZA	4,67	4,79

Tabella 2
Giudizi sul confronto tra metodologia "tradizionale" e approccio flipped classroom.

Globalmente, non emergono grandi differenze tra le percezioni degli studenti della parte del corso condotta con una metodologia "tradizionale" e di quella con l'approccio flipped classroom. Dall'analisi statistica condotta all'interno del progetto FliSCo emergono differenze significative solo per l'acquisizione dei concetti disciplinari e il coinvolgimento personale da parte degli studenti, con giudizi a favore dell'approccio flipped classroom.

6.2 Risultati del sondaggio di gradimento istituzionale

Le risposte fornite dagli studenti al sondaggio di gradimento istituzionale sono state suddivise in tre macro-categorie: commenti sul lavoro a casa, commenti sul lavoro in aula e commenti generali. In questa ultima rientrano le affermazioni che fanno riferimento all'intero percorso in esame, considerando cioè i due momenti di lavoro, a casa e in aula, o esplicitando caratteristiche comuni a entrambi.
Di seguito si riporta l'analisi delle risposte fornite alle due domande, inserendo per ciascuna categoria esempi di commenti che si ritengono significativi, perché rappresentativi, ricorrenti o particolarmente accurati. Si specifica che le risposte a entrambe le domande possono appartenere a più di una categoria, essendo talvolta costituite da più commenti o toccando in una stessa argomentazione aspetti che caratterizzano categorie diverse.

6.2.1 Risposte alla prima domanda

Delle 66 risposte fornite alla domanda 1 *(Che cosa hai particolarmente apprezzato del corso? Motiva le tue scelte)*, 44 (circa il 66,7%) si riferiscono in modo esplicito al percorso flipped classroom e sono soggette ad analisi. Si tratta di un numero molto elevato se si considera che solo un terzo del corso ha visto l'adozione dell'approccio flipped classroom e nel questionario non era fatta menzione a questo approccio. Questo dato è ancora più interessante se si considera la presenza di altre 18 risposte che sono state escluse dall'analisi, perché troppo sintetiche o generiche per essere ricondotte con certezza all'approccio flipped classroom, e non al corso intero. Si tratta, ad esempio, di risposte contenenti commenti generici sulla disponibilità della docente e delle collaboratrici, che potrebbero però riferirsi al ruolo di docente inteso come tutor («La docente si è dimostrata disponibile verso gli allievi, si è messa a disposizione per rispondere alle domande e per chiarire i dubbi») o alle interazioni a distanza attraverso mail o piattaforma («Ho apprezzato molto la disponibilità della docente e degli assistenti, al di fuori dell'orario delle lezioni, nel rispondere ad eventuali domande. (…)»), entrambi rientranti nell'approccio flipped classroom. Ancora, non sono stati considerati i commenti generici su: clima di classe («Il clima quasi familiare del corso è stato davvero utile per me. La matematica è sempre stata il mio tallone di Achille ma grazie a questo corso ho iniziato a capire qualche cosa») o caratteristiche professionali attribuite alla docente («Ho apprezzato l'entusiasmo con cui la docente conduceva la lezione, in questo modo favoriva il coinvolgimento alla lezione»).
L'analisi delle risposte alla domanda 1, riconducibili con certezza all'approccio flipped classroom, ha portato all'individuazione delle seguenti otto sotto-categorie:

1. **Commenti sul lavoro a casa**

– **Fruizione dei video al proprio passo e quante volte si vuole.** 5 studenti fanno un esplicito apprezzamento alla possibilità di fruire delle video-lezioni, disponibili sulla piattaforma *iCorsi*, alla velocità più adeguata e quante volte si ritiene necessario, in relazione alle proprie esigenze formative:

> «Ho apprezzato il fatto che c'erano dei "video-lezioni" su *iCorsi*, perché posso riguardarlo con più calma e quante volte lo necessito»;
> «La presenza dei video su *iCorsi* per poterli riconsultare in vista dell'esame».

– **Fruizione dei video, altre caratteristiche.** 11 studenti hanno apprezzato le video-lezioni riportando affermazioni generiche o caratteristiche diverse da quelle incluse nella tipologia precedente:

> «Ho apprezzato, nelle ultime lezioni, i video perché in 10 minuti veniva spiegato l'essenziale del corso»;
> «Ho trovato molto utile il sistema "flipped classroom", il fatto di guardare dei video esplicativi a casa prima di riprendere i concetti a lezione aiuta a comprendere meglio e avere già una base».

– **Attività di problem-solving.** 3 studenti hanno particolarmente apprezzato le attività di problem-solving richieste a casa, associate alla visione dei video:

> «Per quanto concerne lo studio a casa con il metodo flipped è stato molto interessante, ben organizzato (esercizi, quaderni cabri) ed efficace».

2. Commenti sul lavoro in aula

– **Attività di problem-solving e lavoro di gruppo.** 5 studenti esplicitano apprezzamento per le attività di problem-solving proposte in aula, facendo riferimento alla modalità di lavoro in gruppi cooperativi:

> «Ho particolarmente apprezzato le ultime lezioni dove abbiamo potuto testare le nostre conoscenze sotto forma di gioco con i compagni (cruciverba, taboo ecc.)»;
> «Ho apprezzato lo scambio che si poteva avere tra i banchi».

– **Apprendimento attivo e attività di problem-solving, altre caratteristiche.** 16 studenti hanno particolarmente apprezzato l'apprendimento attivo e le attività di problem-solving proposte in aula, facendo riferimento ad altre caratteristiche rispetto ai lavori di gruppo:

> «Il corso è stato dinamico, l'allievo è potuto essere attivo; provare, fare domande, eccetera»;
> «Ho apprezzato le "sperimentazioni" pratiche svolte in classe, poiché stimolano a seguire con maggior attenzione il corso e permettono l'applicazione di concetti teorici in casi pratici»;
> «Del corso teorico ho apprezzato le attività pratiche proposte dalla docente, perché hanno attivato in me voglia di sperimentare e mi hanno permesso di comprendere più facilmente i contenuti del corso».

3. Commenti generali

– **Apprendimento attivo e attività di problem-solving.** 10 studenti hanno apprezzato l'apprendimento attivo e le attività di problem-solving, senza però riferirsi esplicitamente al lavoro a casa o a quello in aula:

> «Le modalità di lavoro pratico-didattiche sono state molto utili per creare collegamenti cognitivi più forti»;
> «Il fatto di mettere in pratica ciò che avevamo appreso teoricamente mi ha permesso di capire dove avevo più difficoltà e dove invece potevo essere più tranquilla. Ho apprezzato molto questa modalità che ha favorito l'apprendimento».

– **Varietà metodologica.** 3 studenti hanno fatto riferimento alla varietà metodologica che ha caratterizzato il corso:

> «Le diverse modalità di insegnamento mi hanno permesso di mantenere attivo il mio interesse. Questo aspetto, che purtroppo non è per niente scontato, ha fatto sì che apprezzassi di più il corso».

– **Punti di forza dell'approccio flipped classroom.** 11 studenti si sono riferiti esplicitamente all'approccio flipped classroom, mettendo in evidenza benefici dell'approccio quali autonomia, efficacia, motivazione, interesse, partecipazione.

> «Inoltre ho apprezzato la modalità flipped di insegnamento in quanto fornisce molta autonomia allo studente e permette in seguito di trattare alcuni punti cruciali durante le lezioni»;
> «Ho particolarmente apprezzato la modalità di lavoro "flipped classroom". Essa mi ha permesso di memorizzare più facilmente i contenuti del corso, in quanto venivano esplicitati in maniera molto chiara e venivano ripresi, mediante delle esercitazioni, nella lezione successiva (in classe)»;
> «Ho apprezzato la parte flipped perché mi ha permesso di capire meglio ed esercitarmi sui contenuti teorici. Inoltre credo che questa modalità abbia contribuito a suscitare maggiore interesse e partecipazione».

Riportiamo di seguito una sintesi delle categorie emerse.

CATEGORIE	N. DI RISPOSTE
COMMENTI SUL LAVORO A CASA	
Fruizione dei video al proprio passo e quante volte si vuole	5
Fruizione dei video, altre caratteristiche	11
Attività di problem-solving a casa	3
COMMENTI SUL LAVORO IN AULA	
Attività di problem-solving e lavoro di gruppo in aula	5
Apprendimento attivo e attività di problem-solving in aula, altre caratteristiche	16
COMMENTI GENERALI	
Apprendimento attivo e attività di problem-solving	10
Varietà metodologica	3
Punti di forza dell'approccio flipped classroom	11

Tabella 3
Sintesi dell'analisi delle risposte alla domanda 1 *(Che cosa hai particolarmente apprezzato del corso? Motiva le tue scelte).*

Dai dati emerge che le caratteristiche più apprezzate dell'approccio sono state la fruizione dei video a casa e le attività di problem-solving proposte in classe, a cui hanno fatto riferimento un totale di 16 e 21 studenti, rispettivamente. Seguono per occorrenze i riferimenti espliciti all'approccio flipped classroom (11), di cui sono stati percepiti benefici quali autonomia, efficacia, motivazione, interesse, partecipazione, e quelli sull'apprendimento attivo e le attività di problem-solving, in aula e a casa (10).

6.2.2 Risposte alla seconda domanda

Alla domanda 2 *(Quali pensi siano gli aspetti da migliorare del corso e in che modo? Motiva le tue scelte)* hanno risposto 59 studenti, e di questi 22 (circa il 37,3%) hanno messo in luce aspetti critici e dato suggerimenti che sono esplicitamente riconducibili al percorso flipped classroom. Gli altri commenti non sono stati invece considerati, in quanto non attribuibili con certezza all'approccio flipped classroom.
L'analisi dei commenti contenuti nelle risposte alla domanda 2 ha portato all'individuazione delle sei sotto-categorie descritte di seguito.

1. **Commenti sul lavoro a casa**

– Eccessivo impiego di tempo. 11 studenti hanno considerato eccessiva la richiesta di tempo per il lavoro a casa:

> «Le richieste pretese per la flipped alcune volte sono state un po' eccessive, poiché hanno richiesto parecchio tempo, ma erano tuttavia una preparazione all'esame»;
> «(…) Inoltre ritengo che il tempo da dedicare al corso fosse eccessivo (per via della flipped classroom) perché era come se ci venisse richiesto l'80% di presenza in classe e l'80% di presenza a casa».

– Tempistiche delle consegne. 4 studenti hanno ritenuto migliorabile la scelta delle scadenze per le consegne previste dal lavoro a casa:

> «(Le tre consegne) meglio diluirle nel tempo e non farle così concentrate nella pratica a blocco».

– Materiale didattico multimediale. 1 studente non si è dichiarato soddisfatto dell'utilizzo di materiale didattico multimediale:

> «Avrei preferito più materiale cartaceo perché ho difficoltà a studiare sul pc».

2. **Commenti sul lavoro in aula**

– Mancanza di tempo. 3 studenti hanno percepito una mancanza di tempo sufficiente per svolgere le attività in aula:

> «In alcuni casi, per mancanza di tempo, le spiegazioni sono state frettolose».

3. **Commenti generali**

– A favore della didattica tradizionale. 3 studenti hanno espresso una preferenza per una didattica più "tradizionale":

> «La lezione dovrebbe essere più frontale, visto che siamo 75 allievi in aula. Se come succede si vogliono creare diversi momenti interattivi, alla fine sono sempre le 4 o 5 solite persone che intervengono»;
> «Trovo che la scelta di mettere video di argomenti interessanti e, soprattutto, utili solo su *iCorsi* sia da migliorare in quanto sarebbe stato meglio affrontare e discutere in classe. Questo avrebbe permesso di fare domande che, magari, sarebbero state chiarite subito e non a una settimana di distanza».

– **A favore della flipped classroom.** 4 studenti si dichiarano favorevoli all'approccio flipped classroom, proponendo un'adozione maggiore all'interno del corso o dando suggerimenti per migliorarne l'implementazione:

> «Mantenere modalità flipped per evitare: lezione frontale, passività, mancanza interazione»;
> «La mole di lavoro a casa… a livello di flipped classroom credo che il sistema di crediti non sia stato rispettato. Se si vorrà continuare con questa modalità (che reputo efficace) credo sia doveroso rivalutare l'ammontare delle ore del corso (es. corso settimane alterne + flipped classroom)».

Riportiamo di seguito una sintesi dei risultati emersi.

CATEGORIE	N. DI RISPOSTE
COMMENTI SUL LAVORO A CASA	
Eccessivo impegno di tempo	11
Tempistiche delle consegne	4
Materiale didattico multimediale	1
COMMENTI SUL LAVORO IN AULA	
Mancanza di tempo	3
COMMENTI GENERALI	
A favore della didattica tradizionale	3
A favore della flipped classroom	4

Tabella 4
Sintesi dell'analisi delle risposte alla domanda 2 *(Quali pensi siano gli aspetti da migliorare del corso e in che modo? Motiva le tue scelte).*

Il dato più rilevante che emerge dalle risposte alla domanda 2 è senza dubbio la percezione della richiesta di lavoro a casa come troppo onerosa, come dichiarato da 11 studenti.

7 Conclusioni e bilancio

Dall'analisi dei risultati ottenuti in questa ricerca emerge una percezione degli studenti prevalentemente positiva dell'approccio flipped classroom.
In particolare, per quanto concerne l'efficacia delle tipologie di attività attraverso cui è stato implementato l'approccio si sono avuti in prevalenza giudizi medio-alti; le video-lezioni, gli esercizi in classe e le attività a casa/online, caratteristiche dell'approccio, hanno ricevuto una maggioranza di giudizi alti. Inoltre, l'approccio flipped classroom, comparato con la metodologia "tradizionale", è stato ritenuto migliore nell'acquisizione dei concetti disciplinari e nel coinvolgimento personale. Tali risultati sono in linea con diversi studi precedenti riportati nel quadro teorico; si pensi ad esempio a (McLaughlin et al., 2014) e Muir (2017). Il dato sul coinvolgimento personale è inoltre stato comune a tutti e cinque i casi di studio sperimentali del progetto FliSCo (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017, p. 182).
Questo assume però particolare importanza nell'ambito della didattica della matematica per la formazione di futuri insegnanti di scuola elementare, dove gli studenti in entrata dimostrano spesso un atteggiamento negativo nei confronti della matematica (Di Martino & Sabena, 2011), cosa che può interferire con la loro crescita professionale (Hannula, Liljedahl, Kaasila & Rösken, 2007). Lavorare sul loro coinvolgimento personale è perciò uno degli obiettivi primari per il docente.
Dal sondaggio istituzionale, che ha visto un numero molto elevato di risposte degli studenti riferirsi all'approccio flipped classroom, nonostante il percorso sperimentale abbia interessato solo un terzo del totale delle lezioni, emerge che capovolgere la classe ha rappresentato un cambiamento decisamente significativo per gli studenti. Nel sondaggio gli studenti esprimono nuovamente particolare apprezzamento per i video, le attività a casa/online e gli esercizi in classe in modalità laboratoriale, mettendo in evidenza la maggiore flessibilità offerta dal poter vedere e rivedere a casa le lezioni teoriche e la possibilità di confrontarsi in aula con i compagni e con la docente, lasciandosi coinvolgere in prima persona in un'applicazione pratica della teoria appresa. Inoltre, sono emersi giudizi positivi sull'approccio in generale, considerato facilitatore di autonomia, efficacia, motivazione, interesse e partecipazione.
Durante le lezioni, la docente ha percepito maggiore motivazione, impegno, coinvolgimento e attenzione da parte degli studenti, probabilmente riconducibili anche allo studio effettuato a casa; atteggiamenti che sono stati confermati dagli studenti stessi e rilevati da altre esperienze presenti in letteratura (Davies, Dean & Ball, 2013; Enfield, 2013; Balaban, Gilleskie & Tran, 2016).
Dal punto di vista della docente, uno dei principali punti di forza del lavoro in aula è stato inoltre la collaborazione tra pari, come testimoniato anche dalle risposte degli studenti all'interno del sondaggio istituzionale, che nel corso degli incontri è sembrata diventare sempre più incisiva ed efficace. Di conseguenza, il clima instaurato in classe è stato particolarmente sereno e produttivo, quasi allegro.
L'intero percorso formativo e i risultati della valutazione finale dimostrano che gli allievi hanno mobilitato nella maggior parte dei casi la competenza focus individuata in fase di progettazione. Ne sono una testimonianza le significative e centrate argomentazioni fornite alle domande aperte della prova d'esame che, se confrontate globalmente con quelle date in occasione delle prove analoghe degli anni precedenti, testimoniano un miglioramento nell'apprendimento sul quale sembrerebbe aver inciso la nuova modalità didattica.

Per quanto riguarda gli aspetti critici del percorso sperimentale, è emerso il disagio di alcuni studenti per le richieste di lavoro a casa, che sono state ritenute talvolta eccessive in termini di impiego di tempo, anche in relazione agli altri impegni accademici e alla mancanza di un riconoscimento formale all'interno del descrittivo del corso. Due soli studenti, invece, hanno considerato negativamente il fatto che il docente venga sostituito con il video nel momento di presentazione dei contenuti, togliendo la possibilità di un'interazione immediata per poter chiedere chiarimenti.
Inoltre, un piccolo gruppo di tre studenti ha avvertito come punto di debolezza del percorso sperimentale la mancanza di tempo a sufficienza durante gli incontri in aula per sciogliere dubbi e approfondire concetti. Tale criticità, pur essendo stata riscontrata da pochi studenti, è invece risultata la problematica maggiormente percepita dalla docente, derivante soprattutto dalla durata degli incontri (due ore lezione), che è stata considerata non adeguata per poter implementare al meglio questo approccio, ossia per prevedere fasi di ripresa del lavoro a casa e successive applicazione in contesti significativi di ciò che si è appreso. Al lavoro a casa segue infatti la necessità di fornire dei feedback agli studenti, di gruppo e talvolta individuali, e di rispondere alle richieste di chiarimento su contenuti teorici che gli studenti hanno affrontato da soli, senza la possibilità di interagire in presenza con il docente. Inoltre, il fatto che gli studenti arrivino alle attività in aula dopo aver già esplorato i contenuti che vengono poi approfonditi durante l'incontro, fa sì che le discussioni collettive siano più profonde e partecipate, come riscontrato anche da Prodromou (2017). Questo rappresenta senza dubbio un vantaggio dell'approccio, di cui però va tenuto conto in termini di tempistiche.
Più in generale, da un bilancio dell'esperienza effettuata dalla docente emerge come l'adozione dell'approccio flipped classroom possa essere davvero sostenibile per studenti e docente solo se le condizioni strutturali e organizzative lo consentono. La progettazione e l'implementazione di questo approccio richiedono molto tempo al docente, basti pensare alla preparazione dei materiali per lo studio a casa, che spesso concerne video didattici autoprodotti, o a quelli di supporto per le varie situazioni proposte in classe. Inoltre, occorre più tempo in aula, per un'efficace gestione delle attività laboratoriali, e fra una lezione e l'altra, affinché gli studenti riescano a svolgere agevolmente le consegne a casa. Ci sono poi altre esigenze che emergono implementando questo approccio, che riguardano ad esempio gli spazi (aule sufficientemente ampie e flessibili, dove sia possibile modificare l'ambiente fisico in funzione delle attività), il supporto tecnico (competenze e strumentazioni tecnologiche per predisporre e gestire al meglio le attività a casa e in aula) e il coordinamento con gli altri corsi (dal quale dipende la possibilità di un accurato lavoro a casa per gli studenti). Tantissime sono inoltre le piccole questioni pratiche da affrontare, che si rischia facilmente di sottovalutare, come ad esempio la necessità di fornire agli studenti indicazioni su come visionare i video didattici in maniera efficace.
A nostro parere è solo con il tempo che questo approccio può essere interiorizzato e valorizzato nel migliore dei modi, sia da parte del docente sia da parte di tutti gli studenti: come sostengono Bergmann e Sams (2016) «Capovolgere la classe è un cambio di mentalità (…)» (p. 19).
Ciononostante, riteniamo che questa sperimentazione, e più in generale l'intero progetto FliSCo, abbia avviato nei formatori e negli studenti coinvolti un profondo cambio di paradigma, attraverso un ripensamento del proprio ruolo all'interno del processo di apprendimento-insegnamento, che ha permesso di migliorare e arricchire le relazioni con il sapere in gioco e le dinamiche tra insegnanti e allievi.

Bibliografia

Abeysekera, L., & Dawson, P. (2015). Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rationale and a call for research. *Higher Education Research & Development*, *34*(1), 1-14.

Amresh, A., Carberry, A. R., & Femiani, J. (2013). Evaluating the Effectiveness of Flipped Class rooms for Teaching CS1. In *2013 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)*, 733-735.

Balaban, R. A., Gilleskie, D.B., & Tran, U. (2016). A quantitative evaluation of the flipped classroom in a large lecture principles of economics course. *The Journal of Economic Education, 47*(4), 269-287.

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your Classroom: Reach every Student in every Class every Day.* Intl Society for Technology: New York.

Bergmann, J., & Sams, A. (2016). *Flip your Classroom*. Firenze: Giunti.

Bergmann, J., & Waddell, D. (2012). *To flip or not to flip? Learning & Leading with Technology, 39*(8), 6-7.

Berrett, D. (2012). How "flipping" the classroom can improve the traditional lecture. *Academic Journal Education Digest: Essential Readings Condensed for Quick Review, 78*(1), 36-41.

Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A survey of the research. In *ASEE National Conference Proceedings*, Atlanta, GA.

Calimeris, L., & Sauer, K. (2015). Flipping out about the flip: All hype or is there hope? *International Review of Economics Education, 20*, 13-28.

Carotenuto, G., Castoldi, M., & Sbaragli, S. (2017). La progettazione a ritroso di un percorso didattico di geometria. Un esempio nel contesto della formazione insegnanti del settore primario. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente, 9*(4), 146-173. Disponibile in http://annali.unife.it/adfd/article/view/1577. ISSN: 2038-1034. (consutato il 12.05.2018)

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze*. Roma: Carocci.

Castoldi, M. (2016). *Valutare e certificare le competenze*. Roma: Carocci.

Cecchinato, G. (2012). *Flipped classroom, innovare la scuola con le tecnologie del Web 2.0.* Disponibile in http://ospitiweb.indire.it/adi/Conv2012Lecce_atti/Cecchinato/c2LCg_frame_dir.htm (consultato il 11.04.2018).

Cecchinato, G., & Papa, R. (2016). *Flipped Classroom: un nuovo modo di insegnare e apprendere*. Novara: De Agostini.

Clark, R.C., Nguyen, F., & Sweller, J. (2005). *Efficiency in learning: Evidence-based guidelines to manage cognitive load*. San Francisco, CA: Pfeiffer.

Davies, R. S., Dean, D. L., & Ball, N. (2013). Flipping the classroom and instructional technology integration in a college-level information systems spreadsheet course. *Educational Technology Research and Development, 61*(4), 563-580.

De Mauro, T. (2012). *La scuola capovolta*. Disponibile in http://www.internazionale.it/ opinione/tullio-de-mauro/2012/11/22/la-scuola-capovolta (consultato il 11.04.2018).

Deci, E., & Ryan, R. (2008). Self-determination theory: A macrotheory of human motivation, development, and health. *Canadian Psychology, 49*(3), 182-185.

Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI* (pp. 89-105). Tallinn: Tallinn University.

Enfield, J. (2013). Looking at the Impact of the Flipped Classroom Model of Instruction on Undergraduate Multimedia Students at CSUN. *TechTrends: Linking Research & Practice to Improve Learning, 57*(6), 14-27.

Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2011). *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

Foertsch, J., Moses, G., Strikwerda, J., & Litzkow, M. (2002). Reversing the Lecture/Homework Paradigm Using ETEACH Web-based Stream Video Software. *Journal of Engineering Education, 91*(3), 267-274.

Franchini, E., Salvisberg, M., & Sbaragli, S. (2016). *Riflessioni sulla valutazione formativa tramite l'uso di video. Linee guida per formatori*. Locarno: SUPSI - Dipartimento formazione e apprendimento.

Flipped Learning Network (2014). What is Flipped Learning? Disponibile in https://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/FLIP_handout_FNL_Web.pdf (consultato il 11.04.2018).

Hannula, M., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds.), *Proc. of 31st PME Conference* Vol. 1 (pp. 153-156). Seoul, Korea.

King, A. (1993). From sage on the stage to guide on the side. *College teaching, 41*(1), 30-35.

Lage, M.J., Platt, G.J., & Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education, 31*(1), 30-43.

Lebrun, M. (2016). La classe inversée au confluent de différentes tendances dans un contexte mouvant. In A. Dumont & D. Berthiaume (Eds.), *La pédagogie inversée* (pp.13-39). Louvain –la-Neuve: De Boeck.

Little, C. (2015). The flipped classroom in further education: literature review and case study. *Research in Post-Compulsory Education, 20*(3), 265-279.

Maglioni, M., & Biscaro, F. (2014). *La classe capovolta*. Trento: Erickson.

Mangan, K. (2013). *Inside the flipped classroom*. Washington: Chronicle of Higher Education.

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: A User's Manual*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

McGivney-Burelle, J., & Xue, F. (2013). Flipping calculus. *Primus: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 23*(5), 477-486.

McLaughlin, J. E., Roth, M. T., Glatt, D. M., Gharkholonarehe, N., Davidson, C. A., Griffin, L. M., Esserman, D. A., & Mumper, R. J. (2014). The Flipped Classroom: A Course Redesign to Foster Learning and Engagement in a Health Professions School. *Academic Medicine, 89*, 236-243.

Merlo, S., & Caldara, M. (2016). Collaborare e cooperare in rete. *Bambini, 3*, 52-56.

Missildine, K., Fountain, R., Summers, L., & Gosselin, K. (2013). Flipping the classroom to improve student performance and satisfaction. *Journal of Nursing Education, 52*(10), 597-599.

Moffett, J., & Mill, A. (2014). Evaluation of the flipped classroom approach in a veterinary professional skills course. *Advances in Medical Education and Practice, 5*, 415-425.

Muir, T. (2017). The enactment of a flipped classroom approach in a senior secondary mathematics class and its impact on student engagement. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 281-288). Singapore: PME.

Negrini, L. (2017). L'approccio didattico flipped classroom. In S. Sbaragli, G. Carotenuto & L. Castelli, L. (A cura di), *Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze (FliSCo). Rapporto interdipartimentale dell'Asse 8* (pp. 15-25). Locarno: Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana - Dipartimento Formazione e Apprendimento, ISBN: 978-88-85585-05-8. Disponibile in http://www.supsi.ch/dfa/pubblicazioni/flipped-classroom.html (consultato il 11.04.2018).

Newmann, G., Jun-Hyun, K., Jung Lee, R., Brown, B. A., & Huston, S. (2016). The Perceived Effects of Flipped Teaching on Knowledge Acquisition. *The Journal of Effective Teaching, 16*(1), 52-71.

Nizet, I., Galiano, O., & Meyer, F. (2016). Vers un cadrage théorique pour comprendre la classe inverse. In A. Dumont & D. Berthiaume (Eds.), *La pédagogie inversée* (pp. 39-50). Louvain – la-Neuve: De Boeck.

Nizet, I., & Meyer, F. (2014). A Flipped Classroom Design for Preservice Teacher Training in Assessment. In J. Keengwe, G. Onchwari & J. Oigara (Eds.), *Promoting Active Learning Through the Flipped Classroom Model* (pp. 71-90). Hershey, PA: Information Service Reference.

OCSE (2008). *Creating Effective Teaching and Learning Environments.* Paris: OECD Publications.

Pierce, R., & Fox, J. (2012). Vodcasts and Active-learning Exercises in a "Flipped Classroom" Model of a Renal Pharmacotherapy Module. *American Journal of Pharmaceutical Education, 76*(10), 1-5.

Prodromou, T. (2017). Using a flipped classroom approach in the teaching of mathematics: A case study of a preservice teachers' class. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 2454-2461). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Raffaghelli, J. E. (2017). Does Flipped Classroom work? Critical analysis of empirical evidences on its effectiveness for learning. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete, 7*(3), 116-134.

Reble, A. (2004). *Geschichte der Pädagogik*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Sbaragli, S., Carotenuto, G., & Castelli, L. (A cura di). (2017). *Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze (FliSCo). Rapporto interdipartimentale dell'Asse 8* (pp. 67-87). Locarno: Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana - Dipartimento Formazione e Apprendimento, ISBN: 978-88-85585-05-8. Disponibile in http://www.supsi.ch/dfa/pubblicazioni/flipped-classroom.html (consultato il 11.04.2018).

Steed, A. (2012). The flipped classroom. *Teaching Business & Economics, 16*(3), 9-11.

Strayer, J. F. (2012). How learning in an inverted classroom influences cooperation, innovation and task orientation. *Learning Environments Research, 15*(2), 171-193.

Street, S. E., Gilliland, K. O., McNeill, C., & Royal, K. (2015). The flipped classroom improved medical student performance and satisfaction in a pre-clinical physiology course. *Medical Science Educator, 25*, 35-43.

Vastarella, S. (2016). Dalla classe capovolta all'apprendimento capovolto: la matematica in video e la sfida del modello Flipped Mastery. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La matematica e la sua didattica. Convegno del trentennale* (pp. 41-48). Bologna: Pitagora.

Wiggins, G., & McTighe, J. (2004). *Fare progettazione. La teoria di un percorso didattico per la comprensione significativa*. Roma: LAS.

Autori/Gemma Carotenuto[*], Silvia Sbaragli[•]
[*]Università degli Studi Suor Orsola Benincasa – Napoli, Italia
[•]Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera
gemmacarotenuto@gmail.com, silvia.sbaragli@supsi.ch

Il controllo semantico sui testi matematici all'inizio dell'università

Semantic control over mathematical texts in freshmen year

Pier Luigi Ferrari
Università del Piemonte Orientale, Italia

Sunto / Questo lavoro si sforza di andare oltre il dibattito, a volte ideologico, a volte superficiale, sul ruolo del linguaggio e della competenza linguistica nell'educazione matematica. Partendo dai risultati di una prova di verifica delle competenze iniziali per un campione di diverse centinaia di studenti di area scientifica, viene proposta una prima interpretazione di alcune delle difficoltà linguistiche degli studenti in contesto matematico.

Parole chiave: linguaggio; controllo semantico; competenza linguistica; matricole universitarie; educazione matematica.

Abstract / This paper tries to move beyond the current debate on the role of language and linguistic competence in Mathematics education, which sometimes is ideological or elusive. Starting from the outcomes of a placement test aimed at the assessment of students' competences in scientific language and Mathematics' notations, the paper provides a first attempt interpretation of some of students' linguistic difficulties in mathematical setting.

Keywords: language; semantic control; linguistic competence; freshman university students; Mathematics education.

1 Premessa

La rilevanza del linguaggio nei processi di insegnamento/apprendimento della matematica è ampiamente riconosciuta, sia sul piano dei curricoli sia su quello della ricerca. In Italia, le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo (MIUR, 2012), ad esempio, mettono in luce che:

> «La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

Negli ultimi anni sono state ampiamente sviluppate, sperimentate e studiate pratiche didattiche in matematica basate sulla comunicazione. Di pari passo, una parte non indifferente delle ricerche presentate nei convegni internazionali di educazione matematica è dedicata allo studio del ruolo della comunicazione nell'apprendimento. Tuttavia, nonostante questa mole di esperienze e ricerche, il tema della *competenza linguistica* in relazione all'educazione matematica non ha mai ricevuto molta attenzione e solo in alcuni casi le caratteristiche dei linguaggi usati nelle pratiche matematiche sono state studiate in profondità. In molte ricerche sembra esserci l'assunzione nascosta che esista una base di competenza linguistica condivisa sufficiente per sviluppare il discorso matematico, e che le difficoltà siano al più dovute a eccessi di formalismo nei testi matematici. La locuzione "linguaggio naturale", ampiamente abusata in educazione matematica, rappresenta abbastanza fedelmente tale assunzione.

Anche le discussioni che ogni tanto compaiono nei mezzi di comunicazione difficilmente affrontano il tema della competenza in termini scientifici. Anche la "lettera dei seicento" (AA.VV., 2017) che ha avuto una certa risonanza in Italia nel 2017, pur esprimendo preoccupazioni in parte condivisibili, non sembra partire da un'analisi aggiornata delle difficoltà degli studenti. A proposito di carenze linguistiche, la lettera sembra collocarle soprattutto nella grammatica, nella sintassi e nel lessico, e chiede di rivalutare il tema della correttezza ortografica e grammaticale. Le azioni che vengono suggerite sono coerenti con questa interpretazione.

La mia esperienza di insegnamento in corsi di matematica di base all'inizio dell'università mi suggerisce da un lato che una base di competenza linguistica condivisa non esiste, così come non esiste il "linguaggio naturale", per lo meno in un contesto educativo, dall'altro che le difficoltà linguistiche, che innegabilmente ci sono, possono essere generate da fattori disparati.

Una cattiva interpretazione del testo di un problema, ad esempio, può dipendere da mancanza di competenza linguistica (ad esempio, sul piano del lessico) ma anche dal fatto che il testo non è stato letto, o lo è stato solo parzialmente. Inoltre una cattiva interpretazione può avere come conseguenza comportamenti riconoscibili e coerenti con la medesima, ma anche, più frequentemente, la scelta di non rispondere, o di rispondere a caso. Questi ultimi tipi di comportamento rendono difficile risalire alle difficoltà linguistiche che li hanno generati.

Anche gli errori in fase di produzione possono essere interpretati diversamente. Un esempio è il seguente. Qualche tempo fa in una prova scritta alcuni studenti hanno usato impropriamente la parola "flesso" per indicare un punto di minimo di una curva. Nel caso di una studentessa straniera si trattava di un errore lessicale puro e semplice: la studentessa semplicemente non conosceva il significato italiano della parola, ed è stato sufficiente segnalarle l'errore per metterla in condizione di non ripeterlo più. Gli altri casi riguardavano studenti italiani che probabilmente avevano usato la parola "flesso" in base all'accezione quotidiana.[1] Questo può essere legato 1
ai loro atteggiamenti nei confronti del linguaggio piuttosto che alla loro competenza lessicale. Gli errori legati agli atteggiamenti sono in genere più difficili da superare e richiedono comunque strategie didattiche completamente diverse.

Vi sono poi studenti che pur possedendo un discreto bagaglio linguistico non lo usano in contesto matematico, e studenti che scrivono in modo apparentemente corretto e appropriato ma senza il controllo del significato di quello che scrivono. Quest'ultimo fenomeno è molto comune fra le matricole universitarie. Questo accade sia in fase di interpretazione, come quando lo studente non coglie il valore delle varie parti del testo, sia in fase di produzione, come quando produce testi apparentemente senza senso o senza scopo. Il fenomeno è ancora più vistoso quando si tratta di controllare espressioni simboliche o rappresentazioni figurali. È evidente che la mancanza di controllo sui significati è un ostacolo anche per qualunque strategia mirata al recupero.

1. In effetti, se uno "flette" con le mani del filo di ferro ottiene una forma che assomiglia a un massimo o un minimo più che a un flesso.

In questo contributo affronto il problema del controllo semantico, soprattutto in relazione alle espressioni simboliche, e illustro alcuni dati che possono essere utili per individuare le radici linguistiche delle difficoltà, con lo scopo di contribuire alla costruzione di interpretazioni precise dei comportamenti linguistici degli studenti, che vadano al di là delle interpretazioni ideologiche o superficiali.

L'attuale ordinamento dei corsi universitari prevede una prova in ingresso per la valutazione delle competenze iniziali (test competenze). Da alcuni anni la prova svolta per i corsi del Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica (DiSIT) dell'Università degli Studi del Piemonte Orientale include alcuni item relativi alla comprensione e completamento di testi. A partire dall'a.a. 2017/18 l'intera prova (20 item) è stata dedicata alla comprensione e al completamento di testi verbali e all'uso dei sistemi semiotici usati in matematica (notazioni simboliche, figure, grafici). Questi materiali non sono sufficienti a dare un quadro completo della situazione, in quanto manca la produzione di testi, che viene spesso richiesta agli studenti, in sede di esami scritti o orali, di prove intermedie o di esercitazioni, per spiegare i loro procedimenti risolutivi o per illustrare alcuni concetti. Tuttavia possono contribuire a delineare alcuni punti critici.
Va comunque premesso che la mancanza di competenze linguistiche può avere diverse influenze sull'apprendimento matematico. In alcuni casi errori o imprecisioni nell'interpretazione o nella produzione dei testi non hanno conseguenze pratiche. In altri casi hanno effetti rilevabili (come il fraintendimento del testo di un problema o la produzione di una risposta o di una motivazione inadeguata). In altri ancora, come accennato in precedenza, possono avere l'effetto non rilevabile di dissuadere gli studenti dal tentare di risolvere un problema o dal produrre un testo quando richiesti. Questi ultimi casi sono i più difficili da individuare, classificare e affrontare e, probabilmente, per questi motivi, i più gravi.

2 Le caratteristiche del linguaggio della matematica

Quando uso la locuzione "linguaggio della matematica" intendo riferirmi, in accordo con Morgan (1998), a tutte le rappresentazioni semiotiche utilizzate nel fare e nel comunicare matematica. Quindi non solo le notazioni simboliche ma anche i testi verbali e le rappresentazioni figurali.
Per quanto riguarda queste ultime, nonostante l'opinione comune contraria, non va dato per scontato che l'uso che se ne fa in matematica (e in altre discipline) sia assimilabile all'uso quotidiano. Le funzioni di molte delle rappresentazioni figurali il cui uso è sempre più diffuso nella vita quotidiana è quello di comunicare significati in modo tale da consentirne l'immediata interpretazione senza bisogno di inferenze (o di controllo concettuale). Questo vale per un'ampia gamma di rappresentazioni, dai segnali stradali agli emoticon. Le rappresentazioni figurali della matematica richiedono invece inferenze (ad esempio, l'interpretazione di un grafico in termini numerici) e l'interpretazione che salta in mente per prima non è necessariamente quella corretta. Ad esempio, la figura sotto a sinistra è una parte del grafico a destra e non, come potrebbe sembrare a prima vista, una porzione del grafico di una parabola. Questo tema è stato discusso più ampiamente da Ferrari (2014).

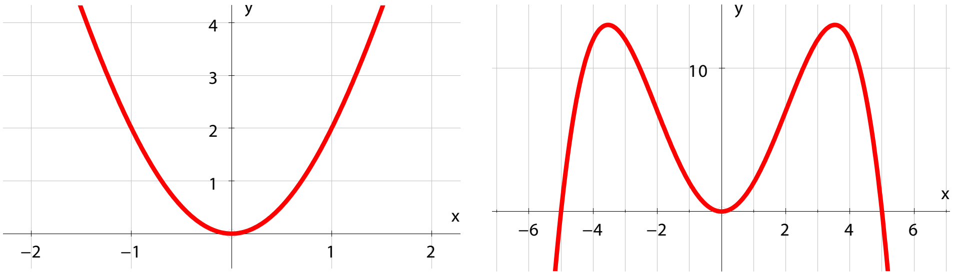


Figura 1
Parabola o quartica?

Per quanto riguarda la componente verbale, le specificità del linguaggio della matematica non riguardano il solo lessico ma anche l’organizzazione dei testi, come osservato, in un contesto più generale, da Halliday (2004). Morgan (1998) e Ferrari (2004) hanno utilizzato strumenti della linguistica funzionale, e in particolare l’idea di registro *linguistico* come varietà linguistica relativa all’uso per caratterizzare il linguaggio della matematica.[2] Ferrari (2004; 2006) ha mostrato che i registri utilizzati in matematica condividono, in forma estrema, molte caratteristiche dei registri colti, e ha messo in luce come alcuni comportamenti degli studenti derivino dall’uso di registri colloquiali per interpretare o produrre testi matematici. Vi è comunque un’ampia gamma di comportamenti linguistici sempre più diffusi, come l’uso improprio della punteggiatura descritto da Demartini (2016), che potrebbero risultare incompatibili con l’alto livello di esplicitazione tipico del linguaggio della matematica.

3 Linguaggio e matematica: il controllo semantico

Il controllo semantico è definito da Ferrari (2001) come la capacità di interpretare e manipolare propriamente le espressioni simboliche e gli enunciati in gioco in un compito matematico come testi da interpretare piuttosto che come contenitori di parole chiave o di altri indizi. Nel caso della risoluzione dei problemi questo significa riconoscere che lo scopo principale degli enunciati (compresi quelli in forma simbolica) è la descrizione delle situazioni problematiche piuttosto che l’innesco di specifici comportamenti o procedimenti. Il controllo semantico è anche collegato (anche se non equivalente) a una qualche capacità di spiegare la propria strategia risolutiva. A questa definizione è opportuno aggiungere le rappresentazioni figurali (grafici, diagrammi, figure geometriche ecc.) a testi verbali e simbolici, in quanto oggi non ci sono ragioni per ritenere che le immagini siano meno problematiche delle altre forme di rappresentazione.
Per mettere in luce il controllo semantico (o la sua mancanza) è necessario prima di tutto individuare situazioni problematiche che richiedano il riferimento puntuale ai significati del testo per costruire una strategia risolutiva e limitino la possibilità di raggiungere soluzioni corrette in modi diversi. Questo accade, ad esempio, se la

2. La definizione di registro come varietà linguistica in relazione all’uso è stata sviluppata da Halliday e Hasan (1976) e applicata alla matematica da Morgan (1998) e Ferrari (2004; 2006; 2011). Questa accezione, che è largamente la più diffusa, differisce da quella usata da Duval (1995). Per Duval “registro” è sinonimo di “sistema semiotico”.

selezione della strategia o la sua applicabilità dipendono da qualche parametro che compare nel testo del compito, o se il compito mette in gioco rappresentazioni che, pur essendo pienamente note e accessibili, differiscono da quelle in cui gli studenti sono abituati a operare.
Questo lavoro si focalizza sull'interpretazione delle espressioni simboliche e sugli intrecci fra le medesime, il linguaggio verbale e le rappresentazioni figurali. Saranno presentati alcuni esempi di difficoltà nell'interpretazione, nella conversione e nel trattamento di espressioni simboliche. Alcune di queste difficoltà possono essere collegate anche a mancanza di competenze, o addirittura di conoscenze matematiche. Tuttavia in tutti questi casi c'è un legame, più o meno evidente, con difficoltà linguistiche. Lo scopo del lavoro è formulare alcune ipotesi sulle possibili radici linguistiche dei comportamenti analizzati, nell'ottica di avere idee più precise sul tipo di competenza linguistica da costruire in continuità verticale dalla scuola elementare alla scuola media superiore.

4 Metodologia

In questa sezione cerco di delineare alcune delle ragioni per cui non è possibile l'applicazione diretta alla ricerca sul ruolo della competenza linguistica nell'apprendimento della matematica di alcune delle metodologie diffuse nella ricerca in educazione matematica.
Per prima cosa, il focus dovrebbe essere non solo sulla competenza lessicale, grammaticale o sintattica ma soprattutto sulla capacità di interpretare testi scientifici e produrne di adeguati. Questo esclude la possibilità di usare esercizi puntuali e richiede di mettere in gioco testi lunghi, come accade del resto da diversi anni nelle prove di lingua italiana dell'INVALSI. L'uso di testi lunghi, specie in contesto universitario, crea problemi in relazione al fattore tempo, e anche agli atteggiamenti degli studenti, che molto spesso sbagliano l'interpretazione di un testo semplicemente perché non lo leggono. Più in generale, i problemi linguistici che emergono in contesto matematico possono derivare da mancanza di competenze linguistiche o dalla mancata applicazione di competenze linguistiche esistenti.
Anche un lavoro di media durata con piccoli gruppi sperimentali presenta grosse difficoltà, in quanto all'università i gruppi devono essere formati su base volontaria. In genere gli studenti disposti a fare un lavoro aggiuntivo sono i più motivati, e di solito in questi casi il lavoro dà ottimi risultati che però sono poco significativi, in quanto gli studenti che hanno problemi sono altri. Se si adescano studenti più deboli con promesse di facilitazioni in sede di esame si rischia di radunare persone non interessate a svolgere il lavoro seriamente, con conseguenze negative. Ovviamente mi riferisco a studenti di corsi di base del I anno di corsi di laurea di area scientifica con elevato numero di iscritti. Anche la pratica di intervistare gli studenti dopo la produzione di un testo scritto, per cercare di ricostruire il loro processo di pensiero, sulla base delle indicazioni di Ericsson & Simon (1984) non è sempre fruttuosa. Nella maggior parte dei casi gli studenti intervistati non sono in grado di ricostruire il loro pensiero e tendono ad attribuire le loro risposte a fattori ritenuti fuori controllo (ad esempio l'agitazione). Non ultimo, c'è il fattore tempo: in alcuni casi quello che è rilevante, nella costruzione di un processo di pensiero non è tanto il fatto di riuscire a interpretare

un testo o una formula quanto il tempo e lo sforzo richiesti. Uno studente che abbia sistematicamente bisogno di svolgere dei calcoli, investendo tempo, per capire che 77 è multiplo di 7 o che l’espressione $x^2 - x$ si annulla per $x = 0$ ha minori possibilità di utilizzare questi fatti per costruire un ragionamento.
Alcuni dei comportamenti descritti in precedenza, come l’uso di registri colloquiali o le improprietà nella punteggiatura spesso non pregiudicano i processi comunicativi. In matematica ci sono imprecisioni innocue e altre che possono avere conseguenze negative. Ad esempio scrivere $2 \cdot -5$ invece di $2 \cdot (-5)$ può non avere conseguenze negative, mentre le ha probabilmente scrivere $5 + 2 \cdot 3$ invece di $(5 + 2) \cdot 3$.
Per queste ragioni è necessario usare problemi che mettano a nudo alcuni punti critici dell’uso del linguaggio e delle rappresentazioni in matematica e provare a dare delle prime interpretazioni. Una volta individuato un insieme di problemi con le caratteristiche indicate verranno confrontati i risultati del problema originario con quelli di varianti in cui le difficoltà linguistiche ipotizzate come fattori di insuccesso vengono neutralizzate. In alcuni dei problemi illustrati negli esempi vengono delineate alcune possibilità di costruire varianti significative. Nel frattempo è necessario anche mettere in piedi un meccanismo di interviste puntuali da svolgere immediatamente dopo le prove. Questo, ovviamente, richiede la pianificazione della didattica in modo da offrire l’opportunità di incontrare gli studenti.

5 Esempi

Quasi tutti gli esempi provengono dal test di verifica delle competenze iniziali svolto presso il Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica dell’Università del Piemonte Orientale nelle sedi di Alessandria e Vercelli, negli anni accademici 2016/17 e 2017/18. La prova consiste in un quiz di 20 item sulla piattaforma Moodle e viene svolta nei laboratori informatici del dipartimento.

Esempio 1
Nell’item che segue era dato in un diagramma cartesiano un punto di coordinate $(x\,;y)$, con x negativo, e gli studenti erano richiesti di collocare un altro punto le cui coordinate erano il risultato di trasformazioni delle coordinate del primo.

Nel diagramma è rappresentato (in rosso) il punto di coordinate $(x;y)$.
Trascina l’etichetta B in modo che corrisponda (col circolino in altro a sinistra) al punto di coordinate $(2x;\ y - 1)$.

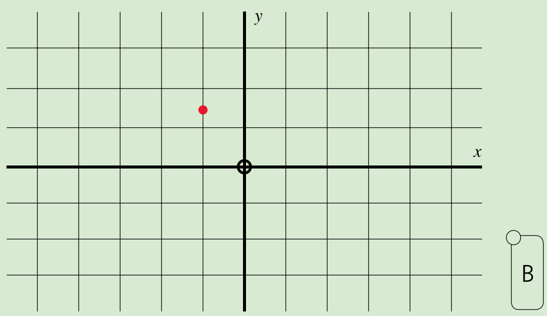


Figura 2
Trasformazioni sulle coordinate.

In questo item il sistema accettava come risposte corrette i punti compresi in un cerchio centrato sul punto esatto e di raggio 5 mm. Nei vari turni della prova sono state presentate diverse varianti di questo problema.
In questo caso particolare, affrontato da 233 matricole del dipartimento, prevalentemente iscritte a Scienze Biologiche, le risposte corrette sono state il 40%. Tra le risposte scorrette prevalgono i punti collocati nel I quadrante (36%). Quasi tutte queste risposte sono date da punti con ascissa approssimativamente uguale a $-2x$. Sembra che più di uno studente su tre sia messo in difficoltà dal fatto che un punto con ascissa x si trovi nel II quadrante, in altre parole che abbia ascissa negativa pur senza un segno "–" in vista. Altri esempi di risposte sbagliate sono punti collocati sull'asse delle y (4%), punti di coordinate $(2x; -y)$ (6%), punti con ascissa $3x$ (2%). Questi risultati possono essere ascritti a un'insufficiente comprensione dei concetti di base della geometria analitica o alla difficoltà di operare conversioni tra i sistemi semiotici in gioco (notazioni simboliche e rappresentazioni nel piano). Tuttavia la difficoltà ad accettare come negativo il valore di una lettera in assenza del segno "–" davanti fa pensare a strategie di lettura basate sulla ricerca di parole-chiave (o segni-chiave) senza alcun tentativo di operare inferenze anche semplici (in altre parole: senza interpretare compiutamente il testo e la figura). Nelle sessioni successive della prova accanto a problemi di questo tipo sono state proposte varianti in cui il punto $(x;y)$ si trova nel primo quadrante, in modo da verificare se la difficoltà sta davvero nell'assegnare valori negativi a una lettera. I risultati di questi esperimenti sono in fase di elaborazione.

Esempio 2
Consideriamo il problema, presentato in due varianti a gruppi diversi di matricole, in anni diversi.
Determinate il dominio della funzione

Variante A	Variante B
$f(x)=\dfrac{x}{2+\sin x}$	$f(x)=\dfrac{x}{2-\sin x}$

Le due varianti sono matematicamente equivalenti, in quanto entrambi i denominatori assumono valori nell'intervallo $[1,3]$. Nonostante questo, la variante A ha ottenuto sistematicamente, in tutte le edizioni, percentuali di successo significativamente più alte della B. Anche qui sembra che la presenza di un segno "–" influenzi l'interpretazione dell'espressione $2 - \sin x$ rendendola "meno positiva" dell'altra. Questi comportamenti sono adottati anche da studenti che a posteriori riconoscono che entrambe le relazioni

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$-1 \le -\sin x \le 1$$

sono vere, e sono quindi in grado di ricavare, sommando 2 a tutti i termini, nei due casi:

$$1 \le 2+\sin x \le 3$$
$$1 \le 2-\sin x \le 3$$

Esempio 3

Fenomeni analoghi si verificano anche con termini del linguaggio verbale. Ad esempio, consideriamo il problema:

Tra i grafici A, B riportati sotto uno corrisponde, nell'intervallo visualizzato, alla derivata della funzione g rappresentata al centro. Quale? Motiva.

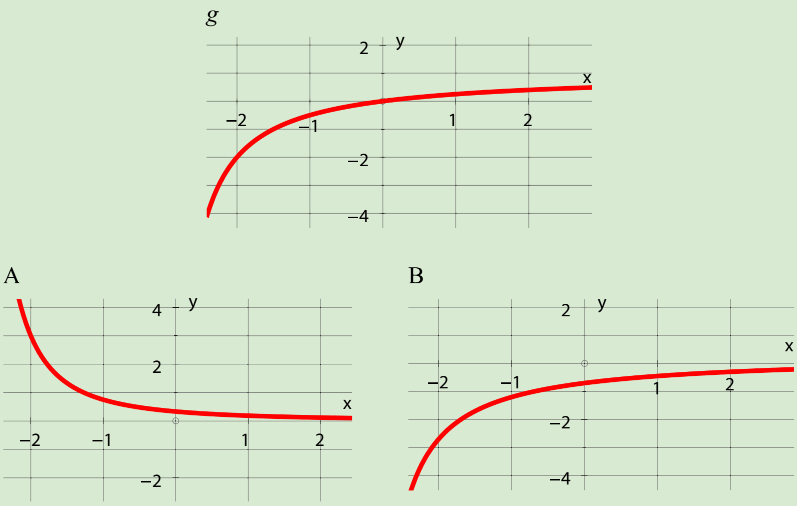


Figura 3
Dal grafico di una funzione a quello della derivata.

Problemi di questo tipo (tratti da esami scritti di matematica per Scienze biologiche e non dal test iniziale) sono stati assegnati per oltre un decennio alle matricole del dipartimento, nel formato a risposta aperta. In tutte le prove si è individuato un numero significativo di soggetti che hanno scelto un grafico del tipo B con la motivazione "g è crescente, quindi anche la sua derivata è crescente", oppure hanno scartato A con motivazioni del tipo "il grafico A è tutto positivo mentre g è anche negativa". In altre parole c'è uno zoccolo duro che sembra applicare pseudo-teoremi come "se la funzione g è crescente [decrescente, positiva, negativa, pari, dispari], allora anche la sua derivata g' è crescente [decrescente, positiva, negativa, pari, dispari]". Questi comportamenti sono tipici degli studenti meno coinvolti nell'attività didattica (lezioni, tutorati) e, anche per questo, non sono facilmente emendabili. Come spesso accade quando si studiano gli intrecci fra matematica e lingua, le interpretazioni possibili sono almeno due. È possibile che la difficoltà riguardi soprattutto la competenza matematica e alcuni degli studenti che adottano questi modelli siano davvero convinti che tali proprietà matematiche siano valide. Oppure è possibile che alcuni studenti (per ragioni che possono essere riferite a mancanza di competenza ma anche ad altri piani, come emozioni o atteggiamenti) semplicemente non cerchino di interpretare la situazione problematica ma si limitino a cercare associazioni tra alcune parole estratte in qualche modo dal testo. La relativa robustezza di questi modelli di risposta fa pensare che la seconda interpretazione sia la più produttiva.

Esempi analoghi sono dati dai numerosi soggetti (fino al 70% delle matricole) che ritengono (in item a scelta multipla) che un prezzo aumentato del 300% sia stato triplicato, o che uno triplicato sia stato aumentato del 300%. Anche in questi casi l'associazione superficiale fra i termini "300%" e "triplicato" prevale sull'interpretazione della situazione problematica.

Esempio 4
In altri casi il testo non viene interpretato ma gioca il ruolo di attivatore di algoritmi. Un classico sono tutti i problemi che richiedono di stabilire il dominio di funzioni come $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$.
Sia nel formato a risposta aperta su supporto cartaceo, sia in quello a scelta multipla online vi sono numeri significativi di soggetti che non riconoscono che x^2+2 è positiva per ogni valore reale di x, ma individuano o scelgono risposte come $x\neq-\sqrt{2}$, $x\neq\sqrt{-2}$, $x\neq\pm\sqrt{2}$, $x\neq\sqrt{\pm 2}$. Tali risposte sembrano originare dall’applicazione di algoritmi in assenza di controllo semantico sulle espressioni. Nelle sessioni successive della prova accanto a problemi di questo tipo sono state proposte varianti in cui il denominatore è una funzione a valori positivi ma non un polinomio di II grado (come ad esempio $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ oppure $f(x)=\frac{1}{x^4+3x^2+2}$), in modo da verificare se è la disponibilità di algoritmi scolastici (come nel caso dei polinomi di secondo grado) che innesca l’esecuzione di algoritmi fuori controllo.

Esempi 5 e 6
Il problema che segue (esempio 5) è stato quasi sempre presentato nel formato a scelta multipla.

Se una delle espressioni elencate sotto è equivalente a “il prodotto del quadrato della differenza di x e y per la somma dei quadrati di x e y” sceglila, altrimenti scegli la voce “Nessuna delle espressioni proposte è equivalente”.

(a) $(x-y)^2\cdot(x^2+y^2)$
(b) $(x-y)^2\cdot(x+y)^2$
(c) $(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)$
(d) $(x^2-y^2)\cdot(x+y)^2$
(e) Nessuna delle espressioni proposte è equivalente

Problemi di questo tipo sono stati assegnati ripetutamente negli ultimi anni nei test di verifica delle competenze iniziali del DiSIT. Se la risposta corretta è una delle espressioni proposte le percentuali di successo oscillano tra 75% e 85%. Se invece la risposta corretta è “Nessuna delle espressioni proposte è equivalente”, allora le percentuali si collocano fra 60% e 70%.

Percentuali di successo analoghe, leggermente ritoccate verso il basso, sono tipiche di problemi come il seguente (esempio 6), che richiede una conversione inversa rispetto al problema precedente.

Se una delle descrizioni elencate sotto è equivalente all’espressione

$$2\cdot(n^3+1)$$

sceglila, altrimenti scegli la voce "Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente".

(a) Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente
(b) Il cubo del successivo del doppio di n
(c) Il cubo del doppio del successivo di n
(d) Il doppio del cubo del successivo di n
(e) Il successivo del cubo del doppio di n

Anche problemi di questo tipo sono stati assegnati negli ultimi anni nei test di verifica delle competenze iniziali del DiSIT. Se, come in questo esempio, la risposta corretta è "Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente", le percentuali di successo oscillano fra 45% e 60%. Se invece la risposta corretta è la descrizione di un procedimento (come i distrattori (b), (c), (d), (e) di questo esempio) le percentuali variano in genere da 65% a 80%.
Problemi di questo tipo mettono in gioco *conversioni* fra sistemi semiotici. Quello che è richiesto è riconoscere l'ordine delle operazioni espresso in un sistema semiotico e associarlo a un'espressione di un altro sistema che esprime lo stesso ordine, se questa esiste. Sul versante del linguaggio verbale si tratta di ricostruire la struttura di un gruppo nominale. Nel caso dell'esempio 6 la struttura del termine è lineare, in quanto ciascun nome regge al più un complemento e i nomi che compaiono funzionano come operatori unari.
Questo è esplicito nella versione verbale, ma non altrettanto in quella simbolica dove "doppio" e "successivo" sono realizzati attraverso gli operatori binari di prodotto e somma. Nell'espressione verbale il primo operatore da sinistra è quello che va applicato per ultimo ("doppio"), mentre l'ultimo è quello che va applicato per primo ("cubo"). Se si esprimesse lo stesso termine come una sequenza di istruzioni (o, se si preferisce, in uno stile verbale), l'ordine sarebbe quello opposto: "Pensa un numero. Calcola il suo cubo. Calcola il numero successivo. Raddoppia il risultato."
Nell'espressione simbolica

$$2 \cdot (n^3+1)$$

il primo operatore che si incontra da sinistra [2] è ancora quello che va applicato per ultimo, ma il secondo [n^3] è quello che va applicato per primo, e il terzo [+1] quello che va applicato per secondo. Questa differenza dipende dal fatto di usare due operatori [prodotto e somma] con notazione infissa (cioè con l'operatore collocato fra i due argomenti) e uno [cubo] in notazione suffissa (cioè con l'operatore collocato dopo gli argomenti) e dalle regole di priorità degli operatori. In italiano la struttura è più semplice, in quanto le parole che hanno funzione di operatore quasi sempre precedono quelle che hanno la funzione di argomento.
Nell'esempio 5 la situazione è un poco più complessa in quanto gli operatori in gioco sono quattro, di cui tre binari ("prodotto", "differenza", "somma") e uno unario ("quadrato") che nell'espressione verbale compare due volte, una al singolare e una al plurale. L'aumento della complessità è più sensibile sul versante dell'espressione verbale. Per comprendere la struttura di un'espressione come "il prodotto del qua-

drato della differenza di x e y per la somma dei quadrati di x e y" è necessaria una certa competenza sintattica e semantica: bisogna riconoscere che gli argomenti del prodotto sono di un termine complesso che inizia con "quadrato" e un altro termine complesso che inizia con "la somma". Per fare questo è necessario sapere che si fa il prodotto *di* qualcosa *per* qualcos'altro, mentre si fa la somma e la differenza *di* qualcosa e qualcos'altro. Inoltre bisogna capire che "la somma dei quadrati di x e y" è un'abbreviazione per "la somma del quadrato di x e del quadrato di y".
In item come questi sembrano avere un certo peso il fattore tempo e anche gli atteggiamenti degli studenti. Alcune categorie di studenti, più sicuri sugli item più strettamente matematici tendono a rispondere frettolosamente agli item come quelli che stiamo discutendo, e viceversa. Il fattore tempo e il contratto didattico spiegano anche le inferiori percentuali di successo nei casi in cui la risposta corretta è "Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente". Anche di questo problema sono state preparate diverse varianti, che coinvolgono diverse funzioni e diversi tipi di notazione. Alcune di queste sono state testate nelle prove successive a quelle considerate in questo lavoro e i risultati sono in fase di elaborazione.

Esempio 7
Il problema seguente è stato affrontato nel test di verifica delle competenze iniziali da 134 matricole del dipartimento nella sede di Alessandria.

Considera la relazione

$(a+b)^2 = a^2+b^2$

Quale delle seguenti voci descrive tutti e soli i valori per i quali la relazione è verificata?

(a) $a=0$ oppure $b=0$
(b) $a=0$ e $b=0$
(c) Nessun valore di a e b
(d) Tutti i valori di a e b
(e) a e b entrambi positivi

Di seguito l'analisi delle risposte (134 partecipanti)

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	NR
N°	33	12	28	28	28	5
%	25%	9%	21%	21%	21%	4%

Consideriamo anche la seguente variante del problema, assegnata a 233 matricole del dipartimento nella sede di Vercelli.

Considera la relazione

$(a-b)^2 = a^2+b^2$

Quale delle seguenti voci descrive tutti e soli i valori per i quali la relazione è verificata?

(a) $a=0$ oppure $b=0$
(b) $a=0$ e $b=0$
(c) Nessun valore di a e b
(d) Tutti i valori di a e b
(e) a positivo e b negativo

Di seguito l'analisi delle risposte (233 partecipanti)

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	NR
N°	67	36	44	51	21	14
%	29%	15%	19%	22%	9%	6%

In entrambe le varianti la distribuzione delle risposte fra i distrattori è piuttosto equilibrata. Questi item riguardano un tema affrontato nella scuola secondaria di secondo grado, che tuttavia richiede una qualche interpretazione delle relazioni, ad esempio attraverso sostituzioni di valori numerici.
La risposta (b) può indicare problemi di logica o, meglio, l'uso in contesto matematico di registri colloquiali. Gli studenti che hanno scelto questa risposta potrebbero aver interpretato la congiunzione "e" come connettore debole, senza interpretarlo come congiunzione logica. La (c) può derivare dalla considerazione che la relazione non corrisponde a un'identità appresa e va quindi rifiutata globalmente. La (d) e la (e) mettono in luce gravissime lacune non solo linguistiche (quadrato della somma o somma dei quadrati è la stessa cosa) ma anche sul piano delle competenze matematiche.
Balza agli occhi il netto divario (come percentuali di successo) fra questo problema e quelli immediatamente precedenti. Negli esempi 5 e 6 vi è comunque una maggioranza di studenti che riescono, pur con qualche incertezza, a dare risposte corrette. In questo solo una minoranza di studenti riesce a farlo. Sembrerebbe che davanti a un'espressione simbolica gli studenti siano più abituati a convertirla in un testo verbale o ad associarla a un procedimento che a interpretarla attraverso la sostitu-

zione di valori numerici alle lettere. Naturalmente tutti questi processi comportano difficoltà e rischi, ma l'incapacità di controllare un'espressione attraverso sostituzioni di valori, a scopo di orientamento o di verifica è un ostacolo enorme. Basterebbero poche sostituzioni per verificare che le relazioni dell'esempio 7 non sono identità e anche per individuare la risposta corretta.

6 Discussione

A mio parere i dati più eclatanti sono quelli relativi agli esempi 1 e 7, che mettono in gioco situazioni che richiedono l'applicazione di abilità di base e prive di complicazioni tecniche. Gli esempi 2 e 3, pur documentando gravi lacune linguistiche, sono associati a situazioni matematicamente più complesse che possono aver indotto gli studenti meno preparati a non tentarne l'analisi e a cercare strategie plausibili in assenza di una qualche interpretazione della situazione problematica. Un discorso analogo vale per l'esempio 4, che è comunque un buon esempio di mancanza di controllo semantico, in quanto i soggetti che sbagliano applicano un algoritmo senza che sia necessario e senza rendersi conto che una delle operazioni utilizzate (l'estrazione di una radice quadrata) non è applicabile a numeri negativi. Come per l'esempio 7, poche sostituzioni potrebbero quanto meno insinuare nello studente il sospetto che l'espressione x^2+2 sia positiva per ogni valore reale di x. In quest'ultimo caso la funzione delle sostituzioni non sarebbe quella di produrre controesempi ma di orientare verso ragionamenti appropriati. Negli esempi 5 e 6 le percentuali di insuccesso sono relativamente basse e probabilmente riguardano la fascia più debole di studenti. I dati su questi esempi documentano che l'associazione di un testo verbale a una formula rimane uno degli strumenti più efficaci che gli studenti possono usare per controllarne il significato. C'è una differenza abbastanza netta fra le percentuali di successo nei problemi in cui la risposta corretta è fra le opzioni di scelta e in quelli in cui la risposta da scegliere è "nessuna delle espressioni/descrizioni proposte è equivalente": dal 15% al 20%. Questa fascia potrebbe essere costituita da studenti la cui competenza linguistica permette loro di riconoscere una formulazione adeguata se presente, ma non di accorgersi che non è presente quando questo è il caso. Quest'ultimo processo probabilmente richiederebbe ai soggetti di essere in grado di produrre loro stessi la formulazione corretta e di confrontarla con quelle proposte. Questo comporta una sicurezza sui registri avanzati della lingua (indispensabile per attività di conversione di questo tipo, che mettono in gioco l'organizzazione sintattica) che molti studenti non possiedono. Per questo un numero rilevante di loro sceglie la soluzione che sembra più plausibile, senza prendersi la responsabilità di scartarle tutte. Su questo possono poi pesare abitudini scolastiche e convinzioni.

I dati relativi agli esempi 1 e 7, indicano difficoltà diverse ma non del tutto scollegate. L'esempio 1 (insieme al 2) sembra documentare l'adozione di strategie che sono la controparte simbolica delle strategie di lettura per ricerca di parole chiave. L'assenza del segno "–" rende per molti difficile accettare che una lettera indichi un valore negativo. Esempi come il 7 riguardano la semantica delle espressioni simboliche, che sembra essere molto poco conosciuta agli studenti. Su questo sembrano esserci ampi spazi per attività didattiche semplici ma molto significative, come la ricerca di esempi e controesempi in relazione a espressioni simboliche anche diverse da quelle

scolasticamente più usate.[3] Questo significherebbe andare al cuore del ragionamento matematico, che si basa sulla continua possibilità di verificare o refutare enunciati, piuttosto che sull'applicazione di metodi argomentativi nati in altre discipline e che poco o nulla tengono conto della specificità della matematica e del suo linguaggio.
In sintesi, possiamo dire che il controllo semantico sulle espressioni simboliche può avvenire in tre modi: (i) tramite la conversione in enunciati della lingua italiana; (ii) tramite il trattamento che trasforma espressioni in altre più esplicite o meglio conosciute; (iii) tramite l'interpretazione delle espressioni grazie alla sostituzione di valori, nel nostro caso numerici, alle lettere. Il primo processo sembra abbastanza affidabile, anche se richiede una certa competenza nei registri avanzati della lingua italiana, che non tutti gli studenti hanno. Il secondo in qualche caso è abusato, come nello studio di espressioni come x^2+2, ma richiede anche la capacità, purtroppo in declino, di riconoscere velocemente alcune espressioni e le loro proprietà. Il terzo, infine, è largamente quello più trascurato. Presenta poche difficoltà tecniche e può essere sviluppato a qualsiasi livello, ma richiede un atteggiamento diverso nei confronti della lingua, e cioè l'idea che le espressioni di ogni genere sono, prima di tutto, portatori di significati.
A mio giudizio queste considerazioni dovrebbero indurre insegnanti e ricercatori a porsi il problema della competenza linguistica e del suo sviluppo nell'arco educativo e in contesto matematico, rinunciando al mito del "linguaggio naturale". Allo stesso tempo, una prima analisi delle difficoltà sembra sottolineare l'urgenza di promuovere atteggiamenti diversi nei confronti del linguaggio, che inducano gli studenti a considerare le espressioni di ogni genere come portatrici di significato osservabili, interpretabili, modificabili in base a criteri condivisi.

Bibliografia

AA.VV. (2017). *Saper leggere e scrivere: una proposta contro il declino dell'italiano a scuola*. Gruppo di Firenze per la scuola del merito e della responsabilità. Disponibile in http://gruppodifirenze.blogspot.it/ (consultato il 01.01.2018).

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf (consultato il 01.01.2018).

Demartini, S. (2016). La grammatica nei testi scritti a scuola. Rilievi dall'analisi del corpus Tiscrivo. In M. Benedetti, C. Bruno, P. Dardano & L. Tronci (A cura di), *Grammatica e Grammatici. Teorie, testi e contesti. Atti del XXXIX Convegno SIG* (pp. 233-238). Roma: Il Calamo.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Ericsson, K.A., & Simon, H. A. (1984). *Protocol Analysis. Verbal Reports as Data*. Cambridge (MA): The MIT Press.

Ferrari, P. L. (2001). Understanding Elementary Number Theory at the Undergraduate Level: A Semiotic Approach. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number*

3. La teoria elementare dei numeri interi offre diverse opportunità, come lo studio delle proprietà di numeri interi rappresentati dalla loro scomposizione in fattori primi. Un esempio è scoprire, dapprima sperimentalmente e poi argomentando, che per ogni valore intero non negativo di m ed n, $3^m \cdot 5^n$ è dispari e $3^m \cdot 5^n+1$ è pari.

Theory: Research in Cognition and Instruction (pp. 97-115). Westport (CT, USA): Ablex Publishing.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio*. Quadro teorico e idee per la didattica. Bologna: Pitagora.

Ferrari, P. L. (2006). Il ruolo del linguaggio nell’apprendimento della matematica. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29A-B*(6), 611-626.

Ferrari, P. L. (2011). Parlare e far parlare di matematica nella scuola secondaria. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 34A-B*(5), 657-666.

Ferrari, P. L. (2014). Quale aiuto possono dare le tecnologie per l’insegnamento/apprendimento dell’aritmetica e dell’algebra? *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 36A-B*(6), 555-574.

Halliday, M. A. K. (2004). *The Language of Science*. London: Continuum.

Halliday, M. A. K., & Hasan, R. (1976). *Cohesion in English*. London: Longman.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. London: Falmer Press.

Autore/Pier Luigi Ferrari
Università del Piemonte Orientale, Italia
pierluigi.ferrari@uniupo.it

Dare senso alle risposte degli studenti: la conoscenza interpretativa nella formazione insegnanti[1]

Making sense of students' answers: interpretative knowledge in teacher training

Maria Mellone[*], **Carlos Miguel Ribeiro**[•] **e Arne Jakobsen**[▴]
[*]Università di Napoli Federico II – Italia
[•]UNICAMP – Brasile
[▴]Università di Stavanger – Norvegia

Sunto / In questo lavoro, facendo riferimento al quadro della Conoscenza Matematica per l'insegnamento (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) parleremo di conoscenza interpretativa, ossia quella particolare conoscenza coinvolta nei processi di interpretazione degli insegnanti. Al fine di indagare e chiarirne le caratteristiche e dimensioni, abbiamo costruito un'attività in cui si richiede di interpretare alcune risposte date dagli alunni ad un problema riguardante i numeri razionali. Abbiamo proposto questa attività ad un gruppo di maestri in formazione e, utilizzando il costrutto MKT, abbiamo rilevato che, nell'interpretazione delle risposte degli alunni, un ruolo importante è giocato dai domini della Conoscenza Comune e Specializzata dei Contenuti (CCK e SCK).

Parole chiave: formazione dei futuri insegnanti; conoscenza interpretativa; osservazione; numeri razionali; rappresentazioni; composizione operazionale.

Abstract / In this work, referring to the framework of the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) we will talk about interpretative knowledge, that is the particular knowledge involved in the processes of teacher interpretation. In order to investigate this particular knowledge and clarify its characteristics and dimensions, we have designed a questionnaire to which we asked a group of future teachers to interpret some productions given by the pupils to a problem concerning rational numbers. Using the MKT construct, we have found that, in the interpretation and evaluation by future teachers of the answers productions by pupils, an important role is given by the domains of the Common and Specialized Knowledge of Contents (CCK and SCK).

Keywords: prospective teachers training; interpretative knowledge; noticing; rational number; operational composition.

1 Premessa

Al giorno d'oggi un aspetto importante dell'insegnamento della matematica è la promozione della riflessione degli studenti sull'efficacia dei ragionamenti e delle rappresentazioni (proprie e altrui) scelte per risolvere un problema. Questo compito richiede, tra le altre cose, la capacità degli insegnanti di dare senso e di fornire opportuni feedback ai processi di soluzione degli studenti e di supportarli nello sviluppo della loro conoscenza matematica a partire da tali processi. È ampiamente

1. Liberamente tradotto da Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013b). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th PME* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Germany: PME.

riconosciuto come questa abilità differisca da quelle associate a una visione tradizionale dell'insegnamento della matematica, concepita come trasmissione di una mera serie di definizioni. Ad esempio, Ball (1993) sostiene che nella "riforma" dell'insegnamento della matematica, gli studenti dovrebbero essere guardati come pensatori creativi e imprevedibili e, per dare senso e supportare lo sviluppo del pensiero matematico di pensatori così imprevedibili, è necessaria una preziosa e flessibile sensibilità matematica da parte degli insegnanti. Queste caratteristiche peculiari della conoscenza matematica necessarie per l'insegnamento sono sapientemente catturate e inquadrate dal costrutto della Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball, Thames & Phelps, 2008).

In particolare, la conoscenza che i docenti di matematica hanno degli argomenti di insegnamento dovrebbe permettere loro di dare senso e capire le risposte degli studenti – soprattutto quando queste si differenziano da ragionamenti standard, cioè quelli più usuali e utilizzati dagli insegnanti stessi. Tale comprensione delle risposte degli studenti da un lato permette all'insegnante di valutare se una soluzione può essere considerata matematicamente valida e generalizzabile ad altre situazioni; dall'altro, lavorare sulle soluzioni date (anche quelle sbagliate) consente un'esplorazione matematicamente valida e significativa dei processi cognitivi messi in atto dagli studenti (per una prospettiva particolare si veda Borasi, 1994). Per questo motivo, la conoscenza degli insegnanti dovrebbe anche includere una vasta gamma di strategie e rappresentazioni per la soluzione dei problemi.

Nel presente articolo riportiamo un lavoro specifico sviluppato per identificare particolari caratteristiche e dimensioni coinvolte nella MKT di futuri insegnanti di scuola elementare mentre interpretano e danno senso alle produzioni degli studenti. Tenendo presente questa prospettiva, abbiamo progettato una particolare attività volta a indagare, e allo stesso tempo promuovere, la conoscenza dei futuri docenti coinvolta in questo lavoro interpretativo. Questa scelta è stata dettata dalla consapevolezza di quanto esso rappresenti uno degli elementi chiave nel contribuire a sviluppare quelle conoscenze matematiche che i futuri insegnanti dovranno poi utilizzare nella loro pratica in aula (si veda ad esempio Rowland, 2008). Per questa ragione questo tipo di attività può essere definito come attività di apprendimento professionale (Professional Learning Task, PLTs), ossia un'attività che simula un tipo di attività con cui gli insegnanti in formazione dovranno poi realmente cimentarsi nella loro vita professionale (Smith, 2001).

In questo articolo tratteremo un'attività, strutturata attraverso una sequenza di quesiti, organizzata intorno alla richiesta di dare senso ad alcune produzioni di alunni relative a un problema che coinvolge i numeri razionali. L'attività è stato ideata al fine di consentire l'esplorazione di varie rappresentazioni equivalenti di una stessa quantità (di cioccolato) utilizzando sia il registro grafico che quello aritmetico. La scelta di tale diversità permette di esplorare le connessioni tra i simboli e i loro referenti semantici, lavorando sull'idea di *composizione operazionale del numero* (Subramaniam & Banerjee, 2011).

Nei paragrafi successivi presenteremo prima il quadro di riferimento teorico del lavoro, successivamente la struttura dell'attività progettata e le produzioni degli alunni scelte da interpretare, infine alcuni risultati ottenuti da un'analisi delle risposte fornite da un gruppo di futuri maestri italiani.

2 Quadro teorico

La conoscenza dell'insegnante e, in senso più ampio le sue convinzioni sulla disciplina e sulle dinamiche del processo di insegnamento-apprendimento, svolgono un ruolo chiave nella sua pratica. La nozione di diversi tipi di conoscenza di Shulman (1986) ha fortemente influenzato la ricerca nell'insegnamento della matematica. Shulman sviluppa un quadro generale per classificare sia i domini che le categorie di conoscenza degli insegnanti, indipendentemente dall'argomento. In particolare, dalle sette categorie definite, solo tre di esse sono correlate, in qualche modo, agli argomenti da insegnare: (a) conoscenza del contenuto, (b) conoscenza del contenuto pedagogico (PCK) e (c) conoscenza curriculare. A partire da questo primo modello sono stati sviluppati diverse articolazioni e approfondimenti. Tra i diversi costrutti riguardanti le conoscenze degli insegnanti di matematica, la MKT, (Ball et al., 2008, **Figura 1**) coglie, a nostro avviso, efficacemente le particolari caratteristiche della conoscenza matematica necessaria per l'insegnamento.

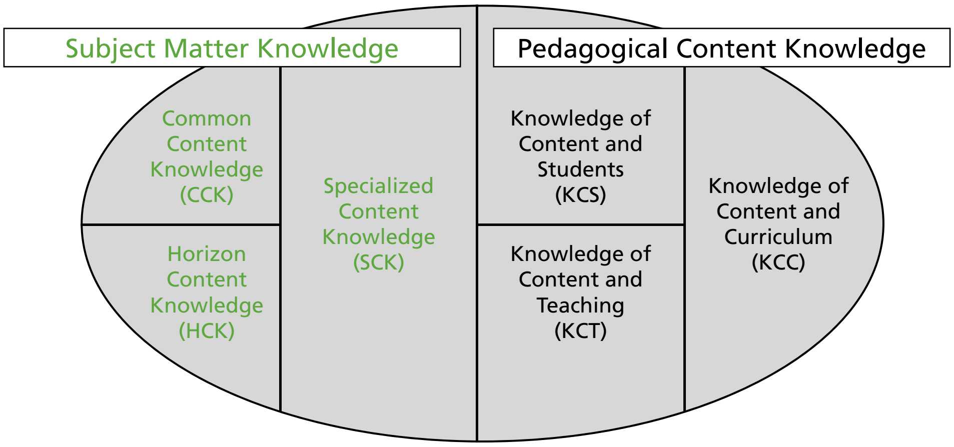


Figura 1
Costrutto della Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

Il lavoro di Ball e colleghi (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008) è particolarmente rilevante in questo senso: i ricercatori riconoscono e definiscono tre tipi di conoscenza del contenuto pedagogico (PCK – parte destra del modello in **Figura 1**): conoscenza dei contenuti e degli studenti, conoscenza del contenuto e insegnamento, e conoscenza del curriculum. Inoltre, nel framework del MKT viene introdotta una nuova dimensione di conoscenza, che fa riferimento allo specifico argomento matematico, la Subject Matter Knowledge (SMK – parte sinistra del modello in **Figura 1**) – complementare e non riducibile al PCK. Tale SMK comporta le specificità delle conoscenze matematiche, riferite ad un particolare argomento matematico, richieste all'insegnante per sviluppare la sua pratica d'aula in modo da supportare gli studenti nello sviluppo della loro comprensione e conoscenza di quello specifico argomento matematico (ad esempio, consentendo loro di capire cosa fanno e perché). Tali specificità integrano le conoscenze matematiche che altri professionisti (come l'ingegnere, l'economista, il programmatore ecc.) pure utilizzano nel loro lavoro (quella ad esempio che viene utilizzata per risolvere correttamente un problema matematico, e che in questo modello viene denominata con Common Content Knowledge – CCK) con aspetti della conoscenza matematica richiesti solo

nell'insegnamento (ad esempio, identificare e comprendere risposte errate, Specialized Content Knowledge – SCK) e sulla consapevolezza di come gli argomenti matematici sono correlati tra loro (Horizon Content Knowledge – HCK).
Uno dei compiti dell'insegnante riguarda il dare senso alle soluzioni degli studenti e aiutarli nell'apprendimento della matematica a partire dai loro processi risolutivi. I contenuti coinvolti in tale conoscenza, che chiameremo *conoscenza interpretativa*, possiedono una natura peculiare e specifica, e ciò motiva anche il nostro uso del MKT per indagare su questa particolare conoscenza dei futuri insegnanti. Nel nostro studio sulla conoscenza interpretativa ci concentriamo principalmente sui sottodomini della CCK e SCK. Infatti, nel valutare e dare senso alle soluzioni degli studenti a un problema relativo ad un determinato argomento matematico, la CCK relativa a quell'argomento matematico, usata sia nell'insegnamento che in altre professioni, è ovviamente fondamentale. Ma allo stesso tempo il lavoro interpretativo ha bisogno anche di un altro tipo di conoscenza. Infatti, oltre al saper risolvere un determinato problema, è essenziale che gli insegnanti abbiano anche delle conoscenze che consentano loro di comprendere il ragionamento matematico dietro a calcoli, definizioni e processi di risoluzione dei problemi. Inoltre gli insegnanti dovrebbero possedere un ricco e ampio bagaglio di esempi, strategie e rappresentazioni possibili che consenta loro di dare senso non solo a soluzioni simili alle loro, ma anche a risposte, a ragionamenti e a strategie non standard. Per questo motivo noi crediamo che la conoscenza interpretativa sia legata alla SCK e intrecciata alla capacità di osservazione dell'insegnante, ovvero la capacità di aumentare la quantità e allo stesso tempo raffinare la qualità degli aspetti osservati nei processi educativi degli studenti (Mason, 2001). Ciò implica la capacità degli insegnanti di operare scelte professionalmente consapevoli in momenti inattesi (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005) e di rispondere alle situazioni che emergono in classe, in modo da fornire agli studenti efficaci esperienze di apprendimento.
La nostra preferenza per il costrutto della MKT rispetto ad altri deriva anche dalla natura, dal focus e dagli obiettivi del lavoro che stiamo sviluppando. Infatti, il contenuto dei sottodomini della MKT è considerato un punto di partenza prezioso per la progettazione di compiti per la preparazione matematica degli insegnanti. Nella nostra prospettiva, considerando l'importanza di un approccio basato sulla pratica al fine di sviluppare la SCK, assumiamo anche come essenziale che i futuri insegnanti sperimentino lo stesso tipo di situazioni che incontreranno sia nel tirocinio che nella loro vita professionale di insegnanti. In questo lavoro presentiamo un tipo di attività, in particolare quella di interpretazione dei processi di risolutivi degli alunni, con cui gli insegnanti in formazione dovranno poi realmente cimentarsi nella loro vita professionale (Smith, 2001).
L'attività che presentiamo, in particolare, riguarda la conoscenza interpretativa degli insegnanti in un problema di scuola elementare che coinvolge la divisione e le frazioni. Le frazioni sono tra i concetti matematici più complessi che i bambini incontrano negli anni di istruzione primaria (Newstead & Murray, 1998). D'altra parte la rilevanza dell'uso delle frazioni in molti altri specifici domini matematici (ad esempio misura, probabilità ecc.) lo rende un argomento cruciale e strategico. Secondo Kieren (1995), le difficoltà degli studenti con le frazioni possono essere ricondotte al fatto che, da un lato le frazioni essendo rappresentazioni di numeri razionali vanno collegate ad altre rappresentazioni dello stesso ente matematico (ad esempio allineamenti decimali ecc.), inoltre le frazioni hanno diversi significati (ad esempio distribuzione, misura, operatore, rapporto tra grandezze). Questa complessità, e le

ben note difficoltà degli studenti, motivano fortemente l'importanza di migliorare la formazione degli insegnanti riguardo questo specifico argomento matematico (per un'altra interessante esperienza di ricerca sull'argomento si veda anche Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla & Sbaragli, 2006).

3 Metodologia di ricerca

Il nostro campione è composto da futuri insegnanti elementari che frequentano i corsi di didattica della matematica all'università di cui noi autori siamo i docenti. Abbiamo quindi progettato un'attività sotto forma di questionario aperto e lo abbiamo tradotto nelle tre lingue italiano, portoghese e norvegese. L'attività mira ad accedere alla conoscenza interpretativa dei futuri insegnanti in un problema che coinvolge le frazioni. Sebbene i dati siano stati raccolti in parallelo, l'intenzione non era quella di fare uno studio comparativo, ma piuttosto di utilizzare la diversità dei contesti come elemento che contribuisce a una comprensione più ricca della conoscenza dei futuri insegnanti sull'argomento in questione. In ogni caso, in questo studio ci concentriamo solo sulle risposte fornite nei questionari dai 108 futuri insegnanti italiani.

3.1 Struttura dell'attività

Nel processo di insegnamento-apprendimento le attività proposte hanno, o almeno dovrebbero avere, un'importanza primaria in quanto modalità principale di costruzione e sviluppo delle abilità, delle conoscenze e delle competenze degli studenti. Ovviamente il modo in cui tali capacità e conoscenze sono percepite e sviluppate dipende dai diversi tipi di discenti (ad esempio studenti, futuri insegnanti); queste differenze dovrebbero influenzare la natura e il focus delle attività proposte. In questo senso, le attività per la formazione degli insegnanti sono percepite in modo diverso dalle attività per i loro studenti. Pertanto, nella strutturazione dei compiti volti a sviluppare le conoscenze degli insegnanti, è necessario tenere conto delle specificità di tale conoscenza e, come abbiamo detto, il quadro della MKT può essere una guida in tal senso. Concentrandosi sulle attività per la formazione degli insegnanti, il nostro approccio considera come elemento fondamentale il collegamento con aspetti della pratica degli insegnanti, intrecciati con la possibilità di permettere loro di avere esperienze simili a quelle che si troveranno ad affrontare con i propri studenti. Ciò significa consentire ai futuri insegnanti di sentirsi coinvolti in un'attività matematica con una duplice visione, sia come insegnanti che come discenti. L'idea è di creare dei contesti di lavoro in cui gli insegnanti in formazione da un lato possano sperimentare le stesse situazioni di piacere, difficoltà e divertimento degli studenti, senza preoccuparsi della componente didattica, ma allo stesso tempo possano migliorare la loro abilità di osservazione e ascolto (Mason, 2001; Davis, 1997) e sviluppare le conoscenze e le competenze matematiche necessarie per il lavoro di insegnamento. In questo senso, crediamo che i compiti per gli insegnanti costruiti sulla richiesta iniziale di risolvere un problema matematico da soli, e in seguito di dare senso a opportune produzioni di alunni allo stesso problema, può essere da un lato una ricca attività di esplorazione matematica che poi diventa anche un'attività di apprendimento professionale (Smith, 2001).

Con questa idea stiamo lavorando ad un ampio progetto di ricerca incentrato sulla progettazione di attività volte a migliorare la conoscenza e la competenza interpretativa degli insegnanti. Qui, come abbiamo detto, ne presentiamo uno riguardante i numeri razionali. Per la progettazione di questa attività ci siamo concentrati sulle relazioni complesse tra le varie rappresentazioni dello stesso numero razionale (pittorica, aritmetica, attraverso il linguaggio naturale), ma anche su diversi modi di esprimere la stessa quantità sommando diverse frazioni. Infatti siamo convinti che lavorare su diverse rappresentazioni dello stesso numero razionale sia uno dei modi per costruire una conoscenza flessibile e significativa di tali oggetti matematici. Come sottolineato da Subramaniam e Banerjee (2011):

> «l'espressione rivela come il numero o la quantità che viene rappresentata è costruita, usando le abituali operazioni sui numeri, da altri numeri e quantità. Questa interpretazione incarna una reificazione più esplicita delle operazioni e ha un maggiore potenziale per creare connessioni tra i simboli e i loro riferenti semantici. L'idea della composizione operazionale di un numero che suggeriamo è una delle idee chiave che segna il passaggio dall'aritmetica all'algebra».
> (pag. 100, traduzione dell'autore)

L'attività si struttura attorno al seguente problema:

La maestra Maria vuole esplorare con i suoi alunni alcune nozioni associate al concetto e alla natura delle frazioni, con questa intenzione prepara un insieme di problemi tra cui quello seguente:
Se dividiamo 5 barrette di cioccolata equamente tra 6 bambini, quanta cioccolata riceverà ogni bambino?

1. Prova anche tu a risolvere il quesito fornendo un'interpretazione grafica della risposta.

Per consentire e stimolare le riflessioni dei docenti in formazione, la prima richiesta dell'attività è di risolvere il problema da soli, e solo successivamente è stato chiesto di interpretare alcune produzioni di alunni riferite allo stesso problema con le seguenti richieste:

2. Indica quali procedimenti ritieni matematicamente corretti e quali incorretti. In entrambi i casi spiega il perché della tua valutazione.
3. Per ciascuna delle risposte spiega cosa proporresti all'allievo come *feedback*.

Queste richieste hanno un duplice scopo: da un lato, coinvolgere i futuri insegnanti in qualcosa che incontreranno nella loro pratica, e cioè valutare e interpretare i processi di risoluzione degli alunni e, dall'altro, lavorare sulle loro convinzioni e conoscenze sia matematiche che pedagogiche, proponendogli delle soluzioni da interpretare opportunamente scelte.

3.2 Le produzioni degli alunni da interpretare

Di seguito presentiamo, spieghiamo e discutiamo la scelta riguardo le produzioni che abbiamo chiesto di interpretare, mostrando il collegamento tra le rappresentazioni grafiche e quelle aritmetiche. La scelta delle soluzioni dei bambini proposte è stata fatta al fine di riflettere sull'equivalenza di diverse rappresentazioni frazionarie e decimali di una stessa quantità, sulle operazioni con le frazioni e sul ruolo dell'intero.

Nella risposta di Mariana (**Figura 2**) le cinque barrette di cioccolato sono rappresentate da rettangoli già divisi ciascuno a metà, ottenendo dunque dieci parti uguali (5 equivale a $\frac{10}{2}$). La prima quantità cerchiata mostra la possibilità di distribuire tra i 6 bambini 6 parti di barrette ($\frac{6}{2}$), lasciandone fuori, in questa prima distribuzione, quattro ($\frac{4}{2}$). Attraverso una freccia, le quattro parti rimaste fuori dalla prima distribuzione, vengono ulteriormente divise a metà, ottenendo così otto parti uguali ($\frac{4}{2}$ equivale a $\frac{8}{4}$), sei delle quali ($\frac{6}{4}$) vengono distribuite tra i 6 bambini, lasciandone fuori, in questa seconda distribuzione, due ($\frac{2}{4}$). Attraverso un'altra freccia, ciascuno dei due pezzi viene diviso in tre parti uguali, ottenendo in questo modo 6 pezzettini ancora più piccoli ($\frac{6}{12}$) che è possibile distribuire tra i 6 bambini. In un riquadro in basso infine vengono disegnate le parti che andranno ad ogni bambino. Sebbene la divisione sia corretta, non è presente alcuna rappresentazione numerica della quantità ottenuta, che è data solo in termini grafici, ma che avrebbe una sua rappresentazione in forma numerica del tipo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$.

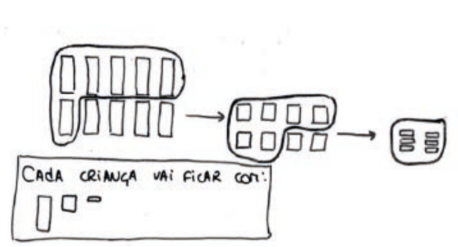
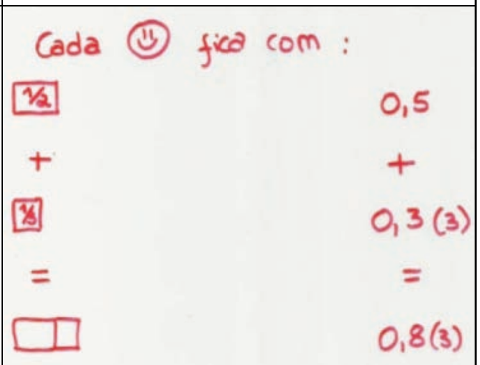
Mariana	Madalena
	
"Ogni bambino avrà".	"Ogni ☺ avrà".

Figura 2
La risposta di Mariana

Figura 3
La risposta di Madalena

Nel secondo protocollo (**Figura 3**), Madalena rappresenta la quantità di cioccolato per ogni bambino utilizzando diverse rappresentazioni. Infatti la quantità di cioccolata che avrà ogni bambino alla fine della suddivisione viene rappresentata sia graficamente che numericamente, scrivendo i numeri sia in forma frazionaria ($\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$) che decimale ($0{,}5+0{,}\bar{3}$). Ci sono diversi aspetti che ci hanno portano a ritenere questa risposta interessante da interpretare. In questo protocollo riconosciamo la complessa relazione tra la rappresentazione frazionaria e decimale del numero, oltre alla difficoltà di gestire rappresentazioni decimali infinite, come quella dei numeri decimali periodici $0{,}3\bar{3}$ e $0{,}8\bar{3}$ (da notare la diversa rappresentazione della periodicità della cifra in Portogallo). Inoltre, in questa soluzione è presente solo la risposta della quantità finale ottenuta da ogni bambino senza riferimento alla procedura di suddivisione, diventa quindi interessante, dal punto di vista interpretativo, immaginarla.

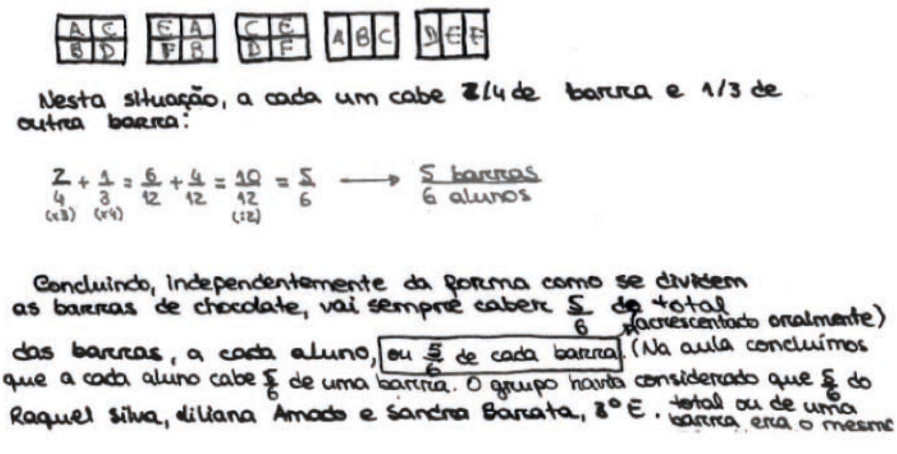
Nella produzione di Sofia (**Figura 4**) riconosciamo cinque rettangoli che rappresentano le cinque barrette di cioccolato, divise in sei pezzi ognuna. Sofia ha poi evidenziato 6 gruppi da 5 pezzi ciascuno riempendoli con motivi diversi. Come risposta finale Sofia scrive, "Ogni bambino avrà i $\frac{5}{6}$ di ogni barretta" che, se fosse vero, significherebbe che ogni bambino otterrebbe $\frac{25}{6}$ di barretta (questo stesso errore si verifica anche nella produzione di Inês (**Figura 5**). Sebbene la risposta data non sia corretta, la suddivisione in termini grafici è coerente e consente di esplorare in modo significativo varie rappresentazioni non canoniche di uno stesso numero, e la proprietà commutativa: $\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$, che corrispondono alle suddivisioni indicate dai 6 motivi di riempimento.

Sofia

"Ogni bambino avrà i $\frac{5}{6}$ di ogni barretta".

Figura 4
La risposta di Sofia

Inês



"In questa situazione, a ognuno spettano $\frac{2}{4}$ di barretta e $\frac{1}{3}$ di un'altra barretta: $\frac{2}{4}+\frac{1}{3}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\rightarrow\frac{5\ barrette}{6\ alunni}$

In conclusione, indipendentemente dal modo in cui si dividono le barrette di cioccolato, spetterà sempre $\frac{5}{6}$ del totale delle barrette a ogni alunno, [o $\frac{5}{6}$ di ogni barretta] (aggiunto oralmente).
In classe concludiamo che a ogni bambino spettano $\frac{5}{6}$ di una barretta. Il gruppo aveva considerato che $\frac{5}{6}$ del totale o di una barretta era lo stesso."

Figura 5
La risposta di Inês

Infine la soluzione di Inês (**Figura 5**) permette una riflessione da parte dei docenti in formazione su alcune questioni aggiuntive rispetto a quelle delle soluzioni precedenti. Le barrette di cioccolato sono rappresentate da 5 rettangoli, di cui i primi 3 sono suddivisi in 4 parti, gli ultimi 2 in 3 parti. Inoltre Inês, a differenza di Sofia che usa dei motivi di riempimento, usa le prime 6 lettere dell'alfabeto per indicare i 6 bambini a cui distribuire le parti di barretta. Sebbene la risposta numerica e pittorica finale sia corretta, esistono diverse incongruenze tra ciò che è rappresentato dal disegno, ciò che è scritto in linguaggio matematico e ciò che è integrato dal linguaggio naturale. Per la rappresentazione pittorica, l'espressione corrispondente alla cioccolata di ogni bambino sarebbe $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$. In altre parole anche in questo caso l'interpretazione di questa soluzione coinvolge un'esplorazione della composizione operazionale del numero attraverso le diverse espressioni equivalenti: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{2}{4}+\frac{1}{3}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$. La strategia aritmetica per trovare il denominatore comune può essere utilizzata come punto di partenza per discutere con i futuri insegnanti il significato di questo procedimento per la somma di frazioni. Infine, la soluzione espressa in linguaggio naturale risulta non corretta ed evidenzia la questione complessa del ruolo dell'intero, che è uno dei punti centrali nelle difficoltà con le frazioni.

4 Risultati e discussione

Inizialmente presenteremo e discuteremo le risposte dei futuri insegnanti al problema delle suddivisioni delle barrette di cioccolato e poi analizzeremo i loro commenti e le riflessioni nella fase di interpretazione delle risposte degli alunni.
Nella prima parte dell'attività, cioè quando dovevano rispondere individualmente al problema, la maggioranza dei futuri insegnanti (55 su 108) ha presentato una soluzione utilizzando solo numeri naturali. Queste soluzioni corrispondono a una suddivisione grafica di ciascuna barretta in sei pezzi. Hanno concluso che ogni bambino avrebbe ottenuto cinque pezzi. In **Figura 6** abbiamo riportato una di queste soluzioni a titolo esemplificativo.

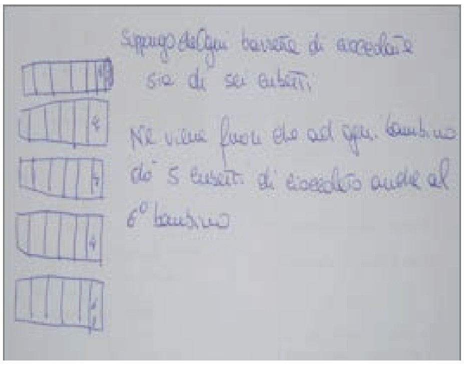


Figura 6
Soluzione di un docente in formazione

"Suppongo che ogni barretta di cioccolato sia di sei cubetti. Ne viene fuori che ad ogni bambino dò 5 cubetti di cioccolato anche al sesto bambino".

Questo tipo di risposta appare rilevante se consideriamo che il testo che accompagna il problema recita esplicitamente: "La maestra Maria vuole esplorare con i suoi alunni alcune nozioni associate al concetto e alla natura delle frazioni". Nonostante ciò, più della metà dei futuri insegnanti ha scelto di usare solo numeri naturali nella loro risposta, rivelando una mancanza di familiarità con la nozione matematica di frazione. In altre risposte, alcuni hanno utilizzato le frazioni combinando il ragionamento sulla distribuzione dei pezzi con l'espressione dei pezzi in termini di frazioni. Tra coloro che hanno utilizzato le frazioni per rispondere al problema (46 su 108), abbiamo trovato alcuni usi inappropriati. Le tipiche risposte sbagliate in termini di frazioni sono "ogni bambino ottiene $\frac{5}{6}$ di ogni barretta" (11 su 46), oppure "ogni bambino ottiene $\frac{1}{6}$ di una barretta" (3 su 46) rivelando difficoltà nel comprendere il ruolo dell'intero. Risultati simili sono stati ottenuti in uno studio precedente (Ribeiro & Jakobsen, 2012).

Abbiamo anche trovato risposte che utilizzavano decimali (8 su 108). La risposta decimale più frequente è stata: 0,83. Questa prima analisi quantitativa sulle soluzioni degli insegnanti è utile per inquadrare il nostro particolare campione, caratterizzato dunque da una CCK debole sulle frazioni.

A conferma di ciò, possiamo osservare che nella seconda fase di valutazione e interpretazione delle risposte degli alunni, un numero davvero esiguo di futuri insegnanti (4 su 108) è stato in grado di rilevare l'inesattezza matematica dell'espressione "ogni bambino avrà i $\frac{5}{6}$ di ogni barretta". L'osservazione principale per quanto riguarda l'analisi qualitativa che abbiamo svolto sul lavoro di interpretazione dei futuri insegnanti alle soluzioni degli alunni, è che la maggior parte di loro trova serie difficoltà nell'interpretare le soluzioni diverse dal proprio procedimento, in accordo con quanto espresso da Kuhlemann (2013). Ecco alcuni commenti sulle soluzioni presentate: "La soluzione di Sofia appare disordinata, tutti questi segni confondono l'idea", "Inês si complica la vita inutilmente", "Mariana segue un percorso più intricato". Ciò che è interessante notare è che se da una parte gli insegnanti non sono in grado di rilevare l'inadeguatezza matematica dell'espressione "ogni bambino ottiene $\frac{5}{6}$ di ogni barretta", essi sono tuttavia pronti a disapprovare una suddivisione delle barrette che, ad un occhio matematico più attento, permette di individuare due diverse somme di frazioni per trovare la giusta quantità di cioccolato che ogni bambino riceve. Commenti come questi rivelano una grande difficoltà nell'uscire dal proprio "spazio di soluzioni", uno spazio evidentemente costituito da un singolo elemento, rendendo così impossibile l'apprezzamento e la comprensione di strategie diverse dalle proprie. Se nei commenti precedenti questa propensione negativa verso una varietà di approcci è solo sfumata, in alcuni commenti si dice esplicitamente che una risposta corretta dovrebbe essere necessariamente simile alla loro, come nel commento seguente:

> «Considero SOFIA corretta (le lettere maiuscole sono nel testo originale): per dirla meglio, intendo che traduce il mio PENSIERO nella soluzione del problema (...) Considero la soluzione di Mariana matematicamente inadeguata a livello di comprensione. Intendo che non è comprensibile su vasta scala, e inizialmente neanche a me. A priori sicuramente non la giudicherei errata, probabilmente la salterei per analizzarla in un secondo momento».

L'affermazione "intendo dire che traduce il mio PENSIERO" rileva un atteggiamento non propenso ad interpretare soluzioni degli studenti diverse dai propri percorsi di ragionamento. Naturalmente questo sembra un atteggiamento umano molto naturale e, in una certa misura lo potremmo accettare da chi lavora in contesti diversi dall'insegnamento, mentre un docente come professionista del suo lavoro, ha bisogno di superare tale criticità, sviluppando una particolare sensibilità e intuizione – abilità legate alla SCK. In questo senso crediamo che i futuri insegnanti debbano lavorare per diventare capaci di interpretare le soluzioni dei bambini. D'altra parte, si potrebbe pensare che questo tipo di atteggiamento più aperto al ragionamento altrui si sviluppi nel tempo, con la pratica e l'esperienza. Tuttavia, alcune evidenze mostrano che questo non è completamente vero:

> «Sono un insegnante da dieci anni e penso che queste soluzioni siano molto confuse. Cerco sempre di rendere le immagini visive il più chiare possibile e cerco di guidare i miei studenti a fare lo stesso. In questo caso i ragionamenti sono molto disordinati e portano a confusione».

In questo senso, possiamo dire che la SCK e la capacità di interpretare e dare un senso alle risposte degli studenti non si sviluppano naturalmente nel corso degli anni di esperienza lavorativa, ma richiedono un'attenzione speciale da un punto di vista educativo.
Nella domanda 3 abbiamo chiesto anche di immaginare possibili feedback da dare agli alunni, e abbiamo visto che i futuri insegnanti nel caso di risposte ritenute scorrette o confuse proponevano spesso di mostrare la propria soluzione agli alunni, come si vede nel seguente commento:

> «La soluzione di Mariana non è comprensibile quindi la prima domanda sarebbe: cosa significa questa rappresentazione? Dopo aver ascoltato la sua risposta, le farei vedere la mia rappresentazione».

Inoltre è interessante notare che tra coloro che hanno rivelato un buon CCK nel problema della suddivisione delle barrette di cioccolata (dando ad esempio una risposta in termini di frazioni), alcuni percepiscono le soluzioni degli studenti, anche quelle inadeguate, come una possibilità e un buon punto di partenza per lavorare con la classe. In un certo senso alcuni di loro, come sperato, vedono le risposte sbagliate come opportunità per sviluppare la conoscenza e la consapevolezza degli alunni sulle suddivisioni e le frazioni:

> «La prima cosa che farei è invitare i bambini a copiare le soluzioni di Sofia, Madalena, Mariana e Inês su un poster e cercherei di far notare somiglianze e differenze tra loro. Alcune di queste soluzioni richiedono molta attenzione da parte dell'insegnante, che deve decodificare ciò che l'alunno intende e aiutare i bambini a dare senso a soluzioni diverse».

Queste risposte rivelano intuizioni pedagogiche ricche e preziose. Possiamo osservare un certo legame tra queste proposte e l'idea di Mason di cosa significhi *notare*:

> «Aumentare la sensibilità per notare le opportunità di agire, e allo stesso tempo far giungere alla mente, nel momento in cui sono rilevanti, una serie di possibili azioni appropriate».
>
> (Mason, 2001, p. Xi, traduzione dell'autore)

5 Osservazioni conclusive e sviluppi futuri

In questo lavoro abbiamo presentato un'attività costruita su un problema matematico riguardante i numeri razionali, progettato per indagare e contemporaneamente sviluppare la conoscenza interpretativa nei futuri insegnanti elementari. Nell'articolo abbiamo presentato le produzioni degli alunni scelte per l'attività interpretativa dei futuri insegnanti, spiegandone la razionalità e il senso della scelta fatta.
Questa attività è stata utilizzata in diversi corsi di formazione in Brasile, Italia, Norvegia e Portogallo. In questo articolo abbiamo discusso alcuni risultati ottenuti implementando il compito in un gruppo di 108 futuri maestri italiani. L'analisi quantitativa delle risposte al problema della suddivisione della cioccolata ha evidenziato una scarsa CCK sulle frazioni dei futuri insegnanti. Inoltre, le attività progettate ci hanno dato l'opportunità di accedere anche ad altri sotto-domini della MKT. In particolare, nell'analisi qualitativa, le difficoltà ad uscire dal proprio "spazio di soluzioni" e apprezzare e comprendere le diverse strategie di soluzione degli alunni, hanno rivelato anche una mancanza di SCK.
Una delle possibili strade di ricerca future è di approfondire i collegamenti tra CCK e SCK (e il suo contenuto) nell'abilità di interpretazione degli insegnanti. Infine, va aggiunto che, dopo aver somministrato il questionario, abbiamo dedicato una lezione di due ore in cui attraverso una discussione collettiva abbiamo lavorato al fine di sviluppare la MKT dei futuri insegnanti e, contemporaneamente far emergere e discutere le loro convinzioni riguardo la matematica e in generale il processo di insegnamento-apprendimento. Infatti crediamo che l'attività proposta possa rappresentare un buon esempio di PLT da esplorare con i futuri insegnanti proprio per lavorare contemporaneamente sulla MKT e sulle loro convinzioni.

Bibliografia

Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *Elementary School Journal, 93*(4), 373-397.

Ball, D. L., Hill, H. C, & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Borasi, R. (1994). Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M. I., & Sbaragli, S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica, 3*, 353-400.

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 355-376.

Kieren, T. E. (1995). Creating Spaces for Learning Fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades* (pp. 31-66). Albany: State University of New York.

Kuhlemann, S. (2013). Heuristic strategies prospective teachers use in analyzing students' work. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 3145-3154). Antalya, Turkey: METU and ERME.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* Vol. 3 (pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

Mason, J. (2001). *Researching your own practice*. London: Routhedge Falmer.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd IGPME* Vol. 3 (pp. 295-303). Stellenbosch, South Africa.

Ribeiro, C. M., & Jakobsen, A. (2012). Prospective teachers' mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 289-298). Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 149-163.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Smith, M.S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Subramaniam, K., & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. In J. Cai & D. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 87-105). Springer.

Autori/Maria Mellone[*], Carlos Miguel Ribeiro[•] e Arne Jakobsen[▲]

[*]Università di Napoli Federico II – Italia

[•]UNICAMP – Brasile

[▲]Università di Stavanger – Norvegia

maria.mellone@unina.it, cmribas78@gmail.com, arne.jakobsen@uis.no

Esperienze didattiche

DdM

Un percorso di peer education nella scuola superiore incentrato sulla parabola

A peer education experience in the high school focused on the parabola

Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI di Locarno, Svizzera

Sunto / L'articolo presenta l'esperienza di un primo approccio alla peer education, sia per il docente sia per gli studenti, realizzato in una classe di III liceo. La metodologia utilizzata è quella della peer tutoring, caratterizzata dal lavoro in gruppi composti da studenti tutor di livello disciplinare più alto e da studenti tutorandi di livello disciplinare più basso. Le giornate del percorso sono commentate sulla base dell'analisi di registrazioni effettuate durante i lavori; inoltre si analizzano qualitativamente i questionari e la discussione collettiva realizzate a fine percorso, al fine di individuare i punti di forza e di criticità dell'esperienza. Il focus dell'analisi riguarda principalmente aspetti legati alla metodologia applicata, e non al ruolo giocato dal contesto matematico. Si evidenziano da un lato il carattere di criticità che la peer tutoring riveste laddove non siano mai state realizzate attività cooperative, dall'altro la necessità, per un'efficace azione didattica, di una commistione di approcci didattici sia cooperativi (fra alunni) sia orchestrati dall'insegnante, in un'ottica dialogica che non preveda l'utilizzo esclusivo di un metodo piuttosto che un altro.

Parole chiave: peer education; peer tutoring; apprendimento cooperativo; parabola; orchestrazione.

Abstract / The article presents the experience of a first approach to peer education, both for the teacher and for the students, realized in a III class of high school. The methodology used is that of peer tutoring, characterized by the work in groups made up of students with higher disciplinary level (tutor) and by lower level disciplinary student (tutees). The days of the experience are commented on the basis of the analysis of recordings made during the works; in addition, the questionnaires and the collective discussion carried out at the end of the course are qualitatively analyzed, in order to identify the strengths and weaknesses of the experience. The focus of the analysis mainly concerns aspects related to the applied methodology, and not to the role played by the mathematical context. On the one hand, we highlight the critical nature that peer tutoring plays when no cooperative activities have ever been carried out, and on the other hand, it is pointed out the need, for an effective educational action, to combine teaching approaches both cooperative (among students) and orchestrated from the teacher, in a dialogic perspective that does not foresee the exclusive use of one method rather than another.

Keywords: peer education; peer tutoring; cooperative learning; parabola; orchestration.

1 Premessa

Il percorso oggetto di questa esperienza e della relazione finale relativa al tirocinio di pratica per l'abilitazione all'insegnamento secondario in Italia,[1] anno scolastico 2014/2015, si è inserito all'interno di un progetto di dottorato la cui ricerca inten-

1. TFA II ciclo, abilitazione all'insegnamento della matematica e della fisica nelle scuole secondarie di secondo grado in Italia, studenti di età compresa tra i 14 e i 18 anni.

deva indagare gli effetti di un approccio basato sulla *peer education* sui processi di insegnamento/apprendimento della matematica. In particolare, in questo articolo viene descritto un percorso che è stato successivamente modificato e rielaborato per essere sperimentato su più vasta scala (Spagnuolo, 2017a) e che qui viene analizzato dal punto di vista degli studenti e dell'insegnante/tirocinante. Il contributo ha dunque un carattere improntato più alla riflessione sull'esperienza, piuttosto che alla ricerca di criteri oggettivi di valutazione di efficacia. Inoltre, essendo il primo percorso realizzato in quest'ottica sia da parte del docente che da parte degli alunni, si presentano alcuni aspetti di criticità che sono emersi durante lo svolgimento del progetto e che non erano stati previsti a priori. Attraverso il resoconto delle attività dei gruppi, delle percezioni dell'insegnante e degli studenti, delle criticità emerse, degli aggiustamenti in itinere e delle discussioni collettive, questo articolo intende fornire un contributo alla riflessione sull'efficacia della *peer tutoring* laddove venga integrata con modalità di orchestrazione da parte dell'insegnante.
Dal punto di vista disciplinare, il percorso affronta l'introduzione della parabola nel piano cartesiano e lo studio del segno di una funzione che ha come grafico una parabola (d'ora in poi indicato con l'espressione: "studio del segno di una parabola"), in relazione alla risoluzione di disequazioni di II grado. In questo articolo si è scelto di non approfondire l'analisi del ruolo giocato dal contesto matematico, focalizzando piuttosto l'attenzione sulle percezioni degli studenti rispetto alla nuova metodologia utilizzata in classe.
Il percorso è stato realizzato nella classe III di un liceo delle Scienze Umane di Rimini,[2] nell'arco di due mesi, per un totale di 6 interventi, più una lezione introduttiva e una conclusiva. 2

2 Quadro teorico: la *peer education*

Secondo Comoglio (1996), una prima definizione di *peer education* può essere data nel seguente modo: «un insieme di tecniche di conduzione della classe nelle quali gli studenti lavorano in piccoli gruppi per attività di apprendimento e ricevono valutazioni in base ai risultati conseguiti».
La ricerca in didattica (Damon & Phelps, 1989) ha da tempo individuato come, all'interno della dicitura di *peer education*, si possano ritrovare almeno tre interpretazioni, caratterizzate tutte da un approccio di lavoro tra pari, ma diversificate in alcune caratteristiche strutturali: il *peer tutoring*, il *cooperative learning* e la *peer collaboration*:

> «La modalità di *peer tutoring* presume l'assegnazione dei ruoli di tutori e di tutorandi, laddove si intende generalmente che i primi siano studenti aventi una maggiore padronanza della materia rispetto ai secondi (…). Il *cooperative learning* racchiude tutte quelle forme di *peer education* caratterizzate generalmente dalla presenza di studenti eterogenei per competenze, in cui non è esplicitamente riconosciuto uno status differente tra i membri di un gruppo. L'organizzazione del lavoro può prevedere la suddivisione dei compiti tra i vari

2. Il Liceo delle Scienze Umane italiano è paragonabile al Liceo ticinese con opzione economia e diritto. Gli alunni a cui si fa riferimento nel testo corrispondono, dal punto di vista dell'età, ad alunni ticinesi di classe seconda.

> studenti o l'obbligo di occuparsi tutti insieme di una specifica attività.
> Nella p*eer collaboration* i gruppi sono formati in maniera tale che gli studenti abbiano circa gli stessi livelli di competenza e, a differenza del *cooperative learning*, essi sono chiamati a lavorare in ogni momento congiuntamente sullo stesso problema piuttosto che singolarmente su componenti separate. Nella sua forma originale questa modalità prevede che gli studenti lavorino insieme per risolvere compiti di apprendimento stimolanti che difficilmente riuscirebbero a risolvere da soli».
>
> (Spagnuolo, 2017b, p. 129)

Recentemente, alcuni risultati di ricerca hanno messo in luce come questi metodi di insegnamento/apprendimento si mostrino non sempre efficaci, se vissuti ingenuamente dall'insegnante come panacea per tutti i problemi legati all'apprendimento. A tale proposito, Pellerey (2014) ha messo in luce quanto, se poco guidato e controllato dal docente, lo stesso metodo del *cooperative learning* risulti fragile. Inoltre afferma che:

> «L'insegnamento reciproco tra studenti, il *feedback* che riceve l'insegnante dagli allievi e quello che egli loro fornisce, la valutazione formativa, l'insegnamento diretto ed esplicito, che segue da vicino la comprensione dei concetti e la padronanza delle abilità, evidenziano una buona validità didattica».
>
> (Pellerey, 2014, p. 262)

In ciascuna delle tre categorie sopracitate il docente assume un ruolo di facilitatore ed organizzatore delle attività, strutturando ambienti di apprendimento in cui gli studenti, favoriti da un clima relazionale positivo, trasformano ogni attività di apprendimento in un processo di *problem solving* di gruppo, conseguendo obiettivi la cui realizzazione richiede il contributo personale di tutti (Comoglio, 2010).
Tali obiettivi possono essere conseguiti se all'interno dei piccoli gruppi di apprendimento gli studenti sviluppano determinate abilità e competenze sociali, intese come un insieme di abilità interpersonali e di piccolo gruppo indispensabili per sviluppare e mantenere un livello di cooperazione qualitativamente alto. Tali abilità, ovviamente, non nascono spontaneamente, ma deve essere compito del docente trovare strategie adatte a far sviluppare queste competenze (preparare adeguatamente il materiale didattico, supervisionare l'andamento delle discussioni ecc.).

3 Metodologia

Dal punto di vista operativo, il percorso si è sviluppato attorno al lavoro degli studenti su schede di attività precedentemente elaborate dall'insegnante e dal dottorando. In questo percorso si è scelto di rielaborare un approccio di *peer tutoring* con la presenza di ruoli interni ai gruppi: tale approccio è stato pensato in modo specifico per l'insegnamento/apprendimento della matematica ed è descritto in Pesci (2004).
La classe di studenti era composta da 18 femmine e 3 maschi, dunque si sono potuti ipotizzare sette gruppi di tre studenti ciascuno. La composizione dei gruppi è stata effettuata tenendo in considerazione sia un'analisi di carattere prettamente disciplinare, fatta sulla base dei risultati di un pretest che mirava a verificare la presenza dei prerequisiti concettuali, sia un'analisi dal punto di vista sociale delle dinamiche

relazionali fra studenti (descritta dall'insegnante), al fine di raggiungere una suddivisione in gruppi del tipo: un tutor (di livello disciplinare alto) e due tutorandi (di livello disciplinare inferiore).
Poiché l'argomento parabole non era ancora stato affrontato dalla classe, le schede di attività sono state strutturate in ottica di scoperta, in maniera tale che ogni gruppo al suo interno, e poi successivamente durante la discussione di classe, potesse ricostruire e rielaborare autonomamente i concetti trattati. Il tutto è stato mediato dall'insegnante/tirocinante e dal dottorando.
Sono state assegnate tre tipologie di ruoli agli studenti, uno per ciascun componente di ogni gruppo, di cui vengono descritti i compiti:

1. *Ruolo di helper*
- spiegare idee e procedure all'interno del gruppo (l'incaricato espone le varie idee e opinioni);
- chiarire e illustrare (riesporre ciò che gli altri membri hanno detto per spiegare o chiarire un messaggio all'intero gruppo);
- precisare (correggere gli errori nelle spiegazioni degli altri membri, spiegandone il motivo).

2. *Ruolo di controller*
- controllare i turni (assicurarsi che i membri del gruppo svolgano il compito assegnato secondo i turni prestabiliti);
- incoraggiare la partecipazione (assicurarsi che tutti i componenti del gruppo diano il loro contributo);
- verificare la comprensione (assicurarsi che tutti i membri del gruppo sappiano spiegare chiaramente come si è giunti a una conclusione o una risposta).

3. *Ruolo di recorder*
- ricapitolare (riassumere ciò che è stato letto e discusso dal gruppo e le conclusioni a cui si è giunti);
- registrare (l'incaricato mette per iscritto le decisioni del gruppo);
- presentare (esporre i risultati raggiunti dal gruppo quando interpellato dall'insegnante)

L'helper è essenzialmente pensato come tutor dal punto di vista disciplinare, il controller e il recorder come tutorandi. Ognuno dei ruoli presenta inoltre dei compiti che corrispondono a funzioni che favoriscono la gestione e l'efficacia interna al gruppo. Inoltre, il recorder aveva anche il compito, quando chiamato dall'insegnante nei momenti di riepilogo e di messa in comune, di esporre quanto raggiunto dal gruppo. La scelta di questi compiti, in parte diversi dalle scelte di ruoli proposti da Pesci (2004), è dipesa da due fattori: in primo luogo, il fatto che si trattasse di una prima esperienza cooperativa della classe ci ha portato a pensare che gruppi con strutture definite fossero maggiormente controllabili, in secondo luogo, poiché si trattava di un tema di matematica nuovo per gli studenti, avevamo bisogno di almeno uno studente per gruppo che potesse trascinare, disciplinarmente parlando, gli altri componenti. Al fine di creare sintonia e dinamiche sociali stabili nel percorso, è stato deciso di mantenere il più possibile i gruppi fissi lungo tutto il percorso, scambiando però al loro interno, dopo ogni attività, i ruoli di controller e di recorder.
Il lavoro all'interno dei gruppi è stato in gran parte registrato tramite telecamera o registratore audio, in modo da poterlo poi visionare/ascoltare e analizzare.

4 Aspetti disciplinari e didattici

4.1 Considerazioni didattiche

Il rapporto fra geometria e algebra è stato decisamente problematico nella storia della matematica: la conquista del linguaggio simbolico è stata piuttosto lenta e difficoltosa e ci sono voluti diversi secoli per costruire un linguaggio algebrico ed arrivare ad un vero e proprio simbolismo. Le varie quantità, incognite e parametri erano inizialmente indicate con termini del linguaggio naturale, successivamente con abbreviazioni; solo con Viète prima (1540-1603) e Descartes poi (1596-1650) si iniziano ad utilizzare lettere anche per costruzioni geometriche. È chiaro che, riprendendo la distinzione fra la natura degli ostacoli (Brousseau, 1983; D'Amore, Fandiño & Sbaragli, 2003), siamo davanti ad un possibile ostacolo di tipo epistemologico, cioè un ostacolo all'apprendimento che si riferisce ad un particolare concetto, nodo della matematica, che per sua natura è intrinsecamente complesso e delicato. Non è dunque per nulla scontato e banale per uno studente, proprio perché non lo è stato nel corso dell'evoluzione della matematica, riuscire a gestire i passaggi tra i registri verbale, algebrico e geometrico nell'interpretazione dei parametri che entrano in gioco nell'acquisizione dei concetti che ruotano attorno alla parabola. D'altra parte, è solo grazie alla comprensione e all'utilizzo dei diversi registri semiotici dello stesso oggetto matematico che è possibile concepirlo da diversi punti di vista e costruirsene un modello adeguato (Duval, 2006). Nel caso di questo percorso si è scelto di insistere molto sul passaggio dal registro geometrico del grafico della parabola a quello algebrico di equazioni e disequazioni di II grado, ipotizzando che molte delle difficoltà concettuali avrebbero infatti riguardato proprio questi aspetti.

Si è scelto di introdurre la parabola come grafico rappresentante l'andamento dello spazio di frenata in funzione della velocità di una vettura, ovvero come modellizzazione di un fenomeno reale. Successivamente ci si è concentrati sulle caratteristiche geometriche dell'oggetto parabola a partire dall'equazione del tipo $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Si sono tralasciate altre rappresentazioni di equazioni come $y - y_v = a \cdot (x - x_v)^2$ poiché l'equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ è quella che maggiormente permette di cogliere lo stretto legame tra la parabola e le equazioni e disequazioni di II grado, e anche perché gli studenti non avevano familiarità con la traslazione in geometria analitica. Queste decisioni sono state dettate anche da alcune considerazioni legate al contesto. Trovandoci in una classe di un liceo ad indirizzo umanistico, si è pensato di non approfondire troppo gli aspetti tecnici e algebrici, ma di fornirne una visione globale che permettesse agli studenti di saper leggere, riconoscere e interpretare, nel caso di luoghi geometrici che rappresentano il grafico di una funzione, rapporti di senso fra la coppia di valori (x, y) del piano e la coppia di valori $(x, f(x))$ deducibili dall'equazione del luogo geometrico. Dal tipo di equazione studiata si evince che si è trattato solo il caso di parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle y.

Non è stata inoltre trattata la parabola come luogo geometrico, né come intersezione conica. Dal punto di vista algebrico, si è scelto di non fornire la formula dell'ordinata del vertice $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ ma ricavarla per sostituzione di x_v all'interno dell'equazione della parabola e di non trattare le formule per ricavare il fuoco e la direttrice.

Per quanto concerne i dispositivi operativi, si è scelto di utilizzare una certa varietà di strumenti di natura e significati diversi: libro di testo, schede per attività di gruppo e compiti a casa, LIM (Lavagna Interattiva Multimediale), software GeoGebra e posta elettronica.

Tra questi, il vantaggio dell'utilizzo di GeoGebra sta nel fatto di poter fornire con facilità diverse rappresentazioni di un particolare oggetto matematico, favorendo la comprensione e l'interiorizzazione delle relazioni fra le diverse variabili in gioco. L'utilizzo integrato di questo software e della LIM permette di visualizzare, modificare, intervenire graficamente sui vari disegni in modo efficace, salvare il lavoro condiviso in formato digitale, inviarlo tramite posta elettronica ecc.
Vi è un'ulteriore considerazione da effettuare, che riguarda l'idea di matematica e di insegnamento/apprendimento della matematica che hanno gli studenti: spesso chi sceglie, al termine della scuola media, il liceo delle scienze umane lo fa non per un particolare interesse verso le discipline umanistiche e sociali, ma piuttosto per la sicurezza di una poca rappresentanza in termini di ore settimanali di materie scientifiche; il rapporto con la matematica è dunque spesso conflittuale e il rifiuto verso la disciplina assume spesso connotati di ansia e rigetto emotivo (Di Martino, 2015). Ragionando sul progetto e su come poter intervenire in questo senso, si è deciso di inserire nelle varie fasi di realizzazione del percorso spunti di riflessione e discussione riguardanti la matematica, in riferimento a diversi livelli metacognitivi interconnessi fra loro, percepiti dal punto di vista dello studente: l'idea di matematica, l'idea di apprendimento della matematica, l'idea di insegnamento della matematica.
In quest'ottica, l'apprendimento fra pari in senso generale ha rappresentato una cornice di senso che ha fatto da cassa di risonanza e amplificato gli aspetti socio-relazionali, disciplinari e metacognitivi dell'apprendimento (Figura 1).

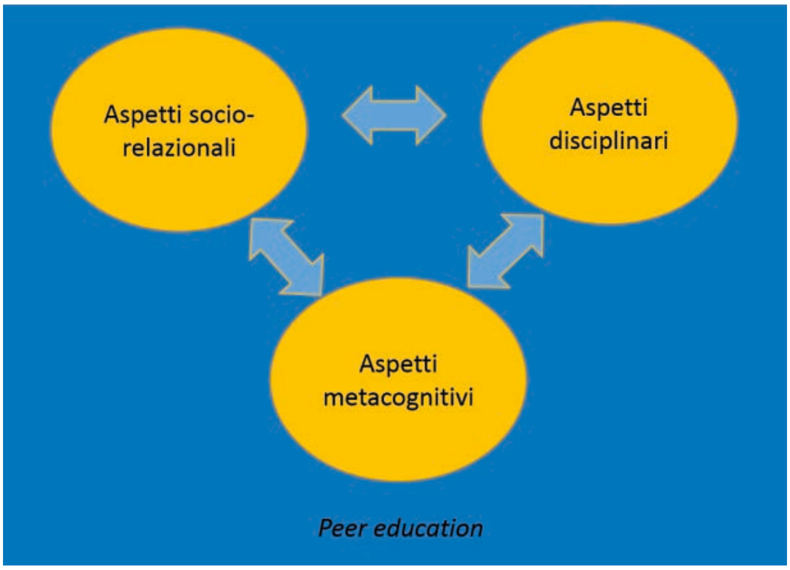


Figura 1
Apprendimento fra pari come cornice di senso e cassa di risonanza.

4.2 Struttura del percorso

Il percorso è stato progettato a priori ed è stato qui schematizzato attraverso una struttura che individua gli snodi concettuali e le relazioni fra le parti:

1. Rappresentazione cartesiana di una situazione fisica in cui emerge un andamento parabolico.
2. Rappresentazione cartesiana di una parabola tramite interpolazione, punto per punto, a partire dall'equazione di una parabola in forma canonica del tipo $y=a{\cdot}x^2$.
3. Caratteristiche geometriche della parabola in forma canonica: l'asse di simme-

tria, il vertice come punto per cui passa l'asse di simmetria, la concavità e la convessità in funzione del segno del coefficiente a.
4. L'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate $y=ax^2+bx+c$.
5. Indagine sul significato geometrico dei coefficienti a, b e c.
6. Disegno di una parabola a partire dalla sua equazione: coordinate del vertice, dell'asse di simmetria e ricerca di punti appartenenti al grafico.
7. Interpretazione geometrica di un'equazione di II grado.
8. Segno della parabola: trovare le ascisse x dei punti di un grafico per cui le corrispondenti ordinate y sono positive, negative o nulle.
9. Studio del segno di una parabola a partire dal grafico già dato.
10. Studio del segno di una parabola a partire dall'equazione della parabola: cosa è indispensabile conoscere?
11. Interpretazione grafica di una disequazione di II grado come caso particolare dello studio del segno di una parabola.

Un percorso realizzato sfruttando le metodologie della *peer education* racchiude inevitabilmente al suo interno anche traguardi di tipo socio-relazionale. Tali traguardi vanno nell'ottica di un'acquisizione di competenze nel saper lavorare in gruppo e riguardano alcune sfere di attitudini/comportamenti fondamentali per una buona riuscita del percorso:

1. saper offrire e ricevere aiuto dall'altro;
2. essere disponibili a dare e ricevere feedback;
3. saper stimolare i membri del gruppo alla partecipazione attiva;
4. saper riconoscere nel gruppo un'opportunità di raggiungimento di obiettivi comuni;
5. saper dare e ricevere fiducia nei confronti degli altri membri del gruppo;
6. sapersi impegnare per interessi condivisi;
7. saper scambiare informazioni e elaborazioni di informazioni e materiali;
8. saper rielaborare un concetto al fine di confrontarlo con gli altri membri del gruppo;
9. saper gestire un clima di serenità che consenta a ciascun membro del gruppo di esprimersi al meglio delle proprie potenzialità.

È importante riconoscere che queste tipologie di obiettivi non sono staccate dai traguardi legati al sapere in gioco; al contrario, gli uni sono di supporto agli altri.

5 Descrizione dell'intervento

5.1 Contesto di sperimentazione

Nella classe III del liceo delle scienze umane sono dedicate due ore settimanali all'insegnamento della matematica. Salvo piccole variazioni nell'orario, nella fase di svolgimento del progetto si è mantenuta tale impostazione. Il percorso si è sviluppato nell'arco di otto settimane.
Sia per gli studenti che per l'insegnante si è trattato della prima esperienza di insegnamento/apprendimento realizzata con metodi cooperativi strutturati tenendo

conto della letteratura di riferimento. Inoltre, vi è anche da dire che la classe non aveva familiarità con un apprendimento basato sulla scoperta, e che durante l'anno scolastico in corso gli studenti avevano mostrato di essere molto abituati e legati a modalità trasmissive del sapere.
Le conoscenze, abilità e competenze in matematica all'interno della classe avevano una distribuzione piuttosto eterogenea. Questo fatto era dovuto alla presenza di alunni provenienti da percorsi scolastici diversi (tre alunni avevano frequentato il primo anno di liceo scientifico), di alunni con disturbi dell'apprendimento (due alunni con discalculia e uno con dislessia), di alunni non madrelingua da pochi anni in Italia (due alunni immigrati recentemente) e di alunni con frequenza scolastica molto altalenante (due alunni con bisogni educativi speciali). Nonostante ciò, tutti gli allievi della classe avevano una sufficiente familiarità con l'utilizzo di quei registri algebrici e geometrici utili ad affrontare l'argomento parabola e disequazioni di II grado.[3] Al fine di avere una panoramica dei prerequisiti posseduti dagli studenti, è stato somministrato loro un pretest (Allegato 1). Sulla base dei risultati emersi, è stata formulata una prima ipotesi di gruppi. 3
Nella lezione successiva di due ore, è stata effettuata in classe una ripresa dialogata e discussa degli esercizi somministrati nel pretest, seguita da un'introduzione sulla metodologia *peer education* e una spiegazione dei ruoli di helper, recorder e controller. I ragazzi sono in seguito stati suddivisi nei gruppi ipotizzati ed è stato chiesto loro di lavorare su una scheda di esercizi (Allegato 2) attraverso la modalità precedentemente descritta. Questa fase ha permesso al docente e al ricercatore di ottenere, attraverso l'osservazione diretta delle dinamiche sociali che si attivavano, una prima impressione sull'efficacia dei gruppi ipotizzati. Sulla base di queste impressioni, sono stati effettuati, cercando di mantenere un equilibrio tra i vincoli della *peer tutoring* e le dinamiche relazionali fra alunni, alcuni spostamenti di studenti da un gruppo a un altro e sono stati definiti i gruppi di lavoro, in seguito indicati con una lettera dalla A alla G. Si è cercato il più possibile di mantenere i gruppi fissi, variandone all'interno i ruoli di controller e di recorder ma non il ruolo di helper.
Il percorso ha previsto poi la somministrazione, nell'arco di diversi interventi di lavoro, di sei schede di esercizi e domande aperte, nelle quali si chiedeva di ragionare via via sui nuovi concetti da comprendere e utilizzare. Ogni intervento era costituito da tre fasi principali: un riepilogo dei concetti emersi fino a quel momento; un lavoro a gruppi basato sulle schede durante il quale era garantito il supporto e l'assistenza del docente e del ricercatore; una o più messe in comune, intermedie e finali dalle quali scaturiva l'istituzionalizzazione del sapere in gioco. Come si può notare, in ciascuna delle fasi è in qualche modo presente la figura del docente, o come garante del sapere appreso (prima fase di riepilogo e ultima fase di istituzionalizzazione), o come stimolo e supporto alla comprensione del gruppo (seconda fase). È sembrato importante preventivare questo aspetto al fine di rassicurare gli studenti e arginare fenomeni di spaesamento e disagio nei confronti di un approccio – la *peer tutoring* in ottica di scoperta – sostanzialmente mai vissuto dalla classe.
In aggiunta alle sei giornate, vi è stato un ulteriore momento conclusivo del percorso che ha visto la somministrazione di un questionario individuale finale a domande aperte, seguito da una discussione collettiva di classe. Il questionario è stato pen-

3. Questa classe aveva già affrontato nel percorso di studi un modulo sulle equazioni e disequazioni di primo grado e gli studenti sapevano rappresentare punti e rette nel piano cartesiano.

sato per raccogliere le percezioni e le opinioni degli studenti riguardo all'esperienza svolta, al fine di individuare snodi problematici su cui riflettere. Le domande del questionario erano:

1. Molti dicono che l'apprendimento collaborativo richiede più impegno ma risulta più efficace: qual è la tua opinione dopo l'esperienza svolta?
2. Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?
3. Cosa ti è piaciuto di più dell'esperienza compiuta? Perché?
4. Cosa ti è piaciuto di meno dell'esperienza compiuta? Perché?

5.2 Gli interventi del percorso

Intervento 1

Ripresa delle caratteristiche dei ruoli all'interno dei gruppi e suddivisione degli studenti (15 minuti).
Agli studenti, tutti presenti, vengono comunicati i gruppi definitivi di appartenenza, i ruoli iniziali, e dichiarato che, a meno di assenze che avrebbero condotto a cambi durante il percorso, i gruppi sarebbero rimasti fissi. È stato anche comunicato loro che il ruolo di helper sarebbe rimasto fisso in tutto il percorso, mentre i controller e i recorder si sarebbero scambiati i ruoli ad ogni scheda.

Somministrazione prima scheda (Allegato 3)*: spazio di frenata (1 ora e 30 minuti).*
La prima scheda di attività conteneva otto esercizi/domande stimolo e mirava a condurre gradualmente gli studenti da una situazione reale modellizzata (spazio di frenata associato al quadrato della velocità) ad un primo studio delle caratteristiche di una parabola in forma canonica, focalizzandone alcune peculiarità grafiche e il significato geometrico del coefficiente a. Per consentire un maggior controllo, il lavoro è stato suddiviso a pacchetti di due esercizi per volta: i gruppi avevano 10 minuti per concentrarsi su tali esercizi; al termine del tempo a disposizione, l'insegnante, chiamando a esporre i recorder, ha riepilogato i risultati raggiunti a tutta la classe riportando sulla LIM quanto emergeva dagli studenti. Tale modalità è stata mantenuta durante tutta la lezione, al termine della quale è stato effettuato un riepilogo finale di tutta l'attività. L'ottavo esercizio è stato assegnato come compito per casa da risolvere entro la lezione successiva. Dei sette gruppi formati, quattro sono riusciti a lavorare in modo completamente autonomo (A, B, C, F), tre gruppi hanno invece richiesto spesso l'aiuto del docente (D, E, G). Emergono delle problematiche dal punto di vista dei ruoli: l'helper rischia di essere l'unico a condurre l'attività, come se fosse il solo a dover svolgere il compito, tanto che nel gruppo F si sostituisce al recorder nella trascrizione dei risultati raggiunti sul foglio; in due casi (gruppi F e G) il controller si è limitato a gestire i tempi, partecipando poco alla discussione e intervenendo solo per avvisare i compagni sui minuti che mancavano; negli stessi due gruppi il recorder ha semplicemente riportato sotto dettatura quanto gli veniva detto dall'helper. In tre casi (A, B, C) l'helper ha svolto un ruolo positivo ai fini della comprensione dei compagni, attraverso espressioni quali "Avete capito?", oppure "Prova a rispiegarmi".

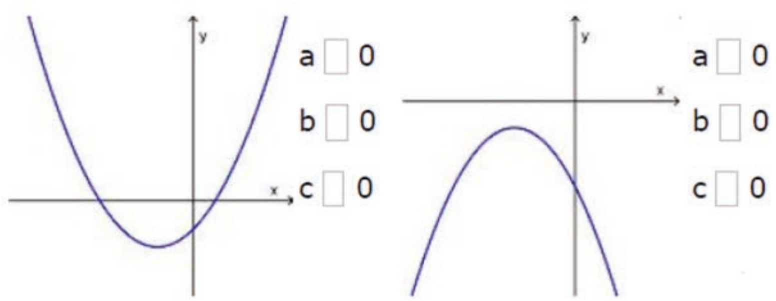
Intervento 2

Ripresa della lezione precedente e suddivisione nei gruppi (15 minuti).
La seconda giornata è iniziata con una ripresa dei concetti affrontati la volta prece-

dente: l'interazione fra docente e studenti ha permesso di riportare l'attenzione sul significato del coefficiente a e di correggere l'esercizio assegnato per casa. L'assenza di due studenti ha costretto a formare un gruppo di quattro persone, composto da un recorder, un helper e due controller. Nello specifico, due componenti del gruppo F hanno lavorato con i due componenti presenti del gruppo E. Prima di iniziare la seconda attività, all'interno dei gruppi è avvenuto lo scambio dei ruoli fra i recorder e i controller. Gli helper sono rimasti come stabilito invariati.

Somministrazione seconda scheda (**Allegato 4**): *i coefficienti a, b e c (1 ora e 30 minuti).* L'obiettivo disciplinare della giornata era arrivare ad una graduale scoperta del significato geometrico dei coefficienti a, b c di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate. Dall'analisi dei video è emerso che nei gruppi A e B, come nell'intervento precedente, vi è stata una discussione nella quale l'helper è riuscito a motivare e coinvolgere gli altri componenti del gruppo, stimolando il recorder a scrivere le conclusioni sul foglio e ponendo domande volte a valutare la comprensione di tutti. Nei gruppi D e E l'helper non è riuscito a condurre i lavori e i gruppi si sono appoggiati in modo consistente al supporto dell'insegnante. È sembrato che la presenza di un helper in difficoltà abbia stimolato la presa in carico del lavoro da parte di tutti i membri del gruppo; tuttavia, laddove non si riesce insieme ad arrivare a risultati convincenti in poco tempo, diventa forte il bisogno e la dipendenza dall'insegnante per dipanare dubbi e togliersi da una sorta di "stallo" operativo. Negli ultimi due gruppi (C e G) i ruoli di controller e di recorder sono apparsi marginali rispetto a quello di helper, che ha diretto i lavori in modo molto autonomo, senza che ci fosse condivisione o chiarimenti di esercizi o concetti non compresi riferiti all'attività in via di svolgimento. Durante l'attività si è intervallato diverse volte il lavoro interno ai gruppi con momenti di messa in comune orchestrata dall'insegnante con il contributo di tutta la classe. Questo aspetto, seppur presente anche nella giornata precedente, ha avuto in questo caso un'accezione leggermente diversa: sono stati gli studenti a richiedere che alcune considerazioni venissero riprese tutti insieme tramite un momento di messa in comune dei risultati. È risultato inoltre particolarmente importante ai fini della comprensione globale utilizzare GeoGebra,[4] grazie al quale gli studenti hanno potuto riconoscere, al variare di un parametro per volta, le caratteristiche geometriche dei parametri a, b e c. Al termine della lezione si è assegnato un breve esercizio da risolvere entro la lezione successiva (**Figura 2**).

In base al grafico della parabola disegnata, di equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, completa le scritture inserendo il simbolo opportuno ('<' minore, '>' massimo, '=' uguale):



4. l'animazione presentata è disponibile all'indirizzo https://www.geogebra.org/m/ua4GgcqF

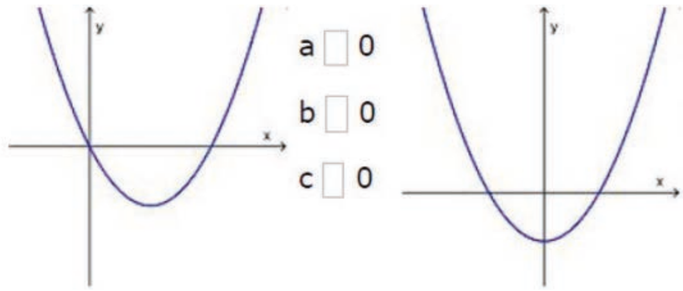


Figura 2
Esercizi assegnati per casa sul significato geometrico dei parametri a,b,c.

Intervento 3

Ripresa della lezione precedente e suddivisione nei gruppi (15 minuti)

La terza giornata ha previsto inizialmente la correzione a grande gruppo, gestita dall'insegnante in modalità di discussione collettiva, dell'esercizio assegnato la volta precedente, in modo da riprendere i concetti e aggiornare gli assenti della lezione precedente. In questa giornata erano assenti quattro studenti, tra i quali un helper. È dunque stato necessario ripensare alla composizione interna in modo da variare il meno possibile i gruppi che sembravano più efficienti e a proprio agio. I due componenti dei gruppi F e G sono stati uniti rispettivamente ai due componenti dei gruppi E e B, che sono dunque diventati gruppi composti da quattro alunni (il gruppo B con un helper e due controller, il gruppo E con due helper)

Somministrazione terza scheda (Allegato 5): *equazioni di secondo grado associate alla parabola e coordinate del vertice (1 ora e 30 minuti).*

Da un punto di vista disciplinare, l'attività ha consentito di riprendere il ruolo fondamentale del rapporto fra registro geometrico e registro algebrico, rappresentato dalla relazione fra equazione di II grado e intersezione della parabola con l'asse delle x. Questo risultato ha permesso anche di introdurre la formula per il calcolo della coordinata x del vertice di una parabola,[5] l'equazione dell'asse e più in generale una procedura per riuscire a disegnare il grafico di una parabola attraverso le informazioni del vertice, delle intersezioni con gli assi e dell'analisi dei segni di a, b e c. A differenza di quanto fatto nelle precedenti due giornate, durante questa lezione c'è stato tempo, nella seconda parte dell'attività, per un lavoro individuale degli studenti nel quale è stato richiesto loro di disegnare in modo autonomo il grafico di una parabola a partire dalla sua equazione.

Nel lavorare sulla prima parte della scheda è emerso a livello globale di classe una problematica dovuta ad una leggerezza commessa in fase di progettazione: dal punto di vista concettuale, per giungere a conclusioni soddisfacenti era necessario far leva su alcuni prerequisiti che, seppur trattati durante l'anno precedente, non erano stati verificati dal docente all'inizio del percorso; inoltre, anche possedendo tali prerequisiti, ci si è resi conto che la richiesta, seppur semistrutturata, ha comportato agli studenti una fatica non preventivata nel ricavare considerazioni e risultati matematici. Queste difficoltà hanno portato a reazioni diverse, emerse durante l'attività e confermate dall'analisi delle registrazioni effettuata a posteriori: in due dei tre gruppi non modificati dai cambi (A e C) si sono attivate interessanti dinamiche di dialogo

5

5. La formula è stata giustificata attraverso la ricerca della coordinata x del punto medio fra i due punti di intersezione di una parabola con Δ positivo.

ed esplorazione nelle quali l'helper non fungeva più da unico garante, ma tutti e tre i componenti si implicavano in prove e tentativi fino ad arrivare in modo autonomo alla soluzione; nei gruppi B, D ed E tale processo è risultato più faticoso e macchinoso, vincolato al sostegno e agli stimoli dell'insegnante.
Come al solito, una volta terminata la prima parte della scheda, l'insegnante ha attivato una messa in comune attraverso la richiesta, fatta ai cinque recorder, di condividere i risultati raggiunti.
I due problemi successivi, relativi al grafico di una parabola a partire dalla sua equazione, sono stati affrontati prima individualmente, poi è stata condivisa la risoluzione all'interno di ogni gruppo; infine, l'insegnante ha chiamato nuovamente a esporre i recorder di ogni gruppo e ha riportato alla lavagna quanto emergeva dalla messa in comune. Nel riepilogo finale, grazie al software GeoGebra integrato con l'utilizzo del software autore della LIM, l'insegnante ha mostrato come la costruzione punto per punto del grafico di una parabola coincidesse quasi esattamente con il grafico che fornisce GeoGebra a partire dall'inserimento dell'equazione della parabola specifica. Ciò ha avuto un effetto rassicurante per gli studenti, tanto che alcuni di loro hanno voluto riprovarlo per altre parabole.
A fine lezione, alcuni studenti hanno espresso la necessità di avere a casa materiali su cui poter studiare. Si è convenuto di inviare di volta in volta agli studenti tramite e-mail le schede di attività realizzate in classe, risolte e commentate. Questa esigenza è nata probabilmente a causa di un senso di spaesamento nei confronti di un apprendimento per scoperta a cui gli studenti non sono abituati. Avere dei materiali a casa, una sorta di appunti della lezione svolta in classe, viene vissuto come aspetto rassicurante.

Intervento 4

Ripresa della lezione precedente e suddivisione nei gruppi (15 minuti)
L'insegnante ha dapprima condotto una discussione collettiva per riepilogare i risultati raggiunti fino a quel momento, per poi suddividere gli studenti nei gruppi. Poiché era assente solo uno studente che aveva il ruolo di recorder (gruppo F), si è convenuto di lasciare il gruppo formato da due persone piuttosto che distribuirle in due terzetti già formati.

Somministrazione quarta scheda (Allegato 6): *il segno di una parabola (45 minuti).*
Dal punto di vista disciplinare, la scheda proposta aveva l'obiettivo di introdurre e ragionare sul rapporto fra il variare del segno dell'ordinata in funzione dell'ascissa, sia dal punto di vista grafico sia algebrico.
Dall'analisi delle registrazioni, sembra che la maggior parte dei gruppi abbiano lavorato in modo abbastanza fluido. Solo in due casi sono emerse situazioni problematiche che sembrano essere legate in un caso all'interazione sociale fra i membri dei gruppi, nell'altro ad una sovrastima da parte del docente delle competenze matematiche dell'helper: nel gruppo G il controller e il recorder tacciono e lasciano gestire tutta la scheda all'helper che, da canto suo, non prova a coinvolgere i compagni; nel gruppo B il controller in difficoltà prova a chiedere aiuto all'helper che dichiara di non essere in grado di spiegare quello che sta facendo e si rivolge all'insegnante.
Anche in questo intervento, è sembrato importante per la comprensione di tutti intervallare momenti di interazione a piccoli gruppi con momenti di discussione del gruppo

classe orchestrati dall'insegnante. La presenza continua di questa dialettica fra l'interazione studenti-studenti e l'interazione studenti-insegnante sembra avere un effetto confortante sugli studenti: sanno che se anche non riusciranno all'interno del proprio gruppo a raggiungere i risultati richiesti, potranno poi attraverso un momento collettivo colmare gli aspetti non compresi e rielaborare positivamente le difficoltà vissute.

Intervento 5

Ripresa della lezione precedente e suddivisione nei gruppi (15 minuti)

Nel momento iniziale si è ripreso collettivamente lo studio del segno di una parabola passo per passo con GeoGebra. Gli studenti hanno mostrato di aver apprezzato l'invio tramite e-mail delle schede commentate e risolte, ma hanno anche espresso la mancanza di una visione globale del percorso che permettesse loro di collegare, matematicamente parlando, tutti i concetti in un'unica visione complessiva. Il docente ha rassicurato la classe dichiarando che ci sarebbe stato un momento finale che avrebbe risposto a questa necessità. Poiché non vi erano assenti, i gruppi sono stati formati seguendo la suddivisione originale.

Somministrazione quinta scheda (Allegato 7): *disequazioni di II grado (1 ora e 30 minuti).*

Girando fra i banchi, ci si è resi conto che alcuni alunni disperdevano energie nella ricerca dei vertici o dell'equazione dell'asse della parabola associata alla disequazione di II grado. Si è più volte interrotto il lavoro e cercato di far comprendere, sempre attraverso una discussione partecipata, come la richiesta che soggiace alla disequazione non implica necessariamente lo studio completo del grafico di una parabola. I tempi si sono inevitabilmente dilatati e non si è riusciti a terminare la scheda di attività, a beneficio però di un feedback verbale positivo da parte degli studenti sulla comprensione del procedimento per risolvere graficamente disequazioni di II grado. Dall'analisi dei video sono emerse alcune dinamiche interessanti:

1. Come accaduto in altri interventi, nei gruppi F e G, l'helper lavora in modo individuale senza coinvolgere nel processo i due compagni, ma focalizzandosi solo sul compilare la scheda correttamente.
2. Nei gruppi A e C, che dall'inizio del percorso non presentano particolari problematiche, è l'helper che riesce a capire come procedere per risolvere l'attività, ma ciò avviene solo grazie agli stimoli e alle domande dei compagni che interagiscono e richiedono spiegazioni puntuali e precise che costringono l'helper a elaborare ipotesi e tentare strategie.
3. Nel gruppo B i ruoli risultano molto mischiati fra loro: si sono create dinamiche di discussione libera sugli esercizi, gli studenti si pongono domande l'uno all'altro a cui provano a rispondere, si correggono e traggono insieme conclusioni; la percezione dall'esterno è che siano tutti insieme i risolutori e che non emerga il ruolo di helper rispetto a quello di controller e di recorder.
4. I gruppi D ed E continuano a faticare dal punto di vista concettuale: risulta necessario un supporto continuo dell'insegnante per poter procedere nella scheda.

Intervento 6

Somministrazione sesta scheda (Allegato 8): *attività conclusiva (1 ora).*

In questa giornata non sono state effettuate registrazioni per evitare che la telecamera provocasse ansia e pressione nella conduzione del lavoro.
Questa attività ha previsto la costruzione del grafico di tre parabole e la risoluzione di tre disequazioni di II grado da parte di ciascun gruppo. In particolare, ad ogni componente del gruppo è stata assegnata la costruzione del grafico di una parabola e la risoluzione di una disequazione di II grado; l'indicazione del docente era di terminare questa prima parte di lavoro autonomo in 20 minuti.
Allo scadere di questi, i membri di ogni gruppo dovevano condividere tra loro i fogli e, sotto la guida del controller, leggere e discutere il procedimento e le soluzioni trovate da ogni membro, al fine di validarle. In caso di domande, chiarimenti, correzioni, da parte di un qualsiasi membro (quindi anche da parte del controller stesso), il controller doveva fermare la lettura e coordinare la discussione al fine di raggiungere una posizione comune. Una volta raggiunta una posizione comune, era compito del recorder scrivere le eventuali correzioni o aggiunte su ciascun foglio e la risposta finale condivisa dall'intero gruppo.
Degno di nota il caso del gruppo F i cui componenti erano stati modificati tre volte nel corso del percorso: i ragazzi non sono riusciti a consegnare tutti i lavori e hanno espresso un disagio nei confronti del fatto che, avendo lavorato poco assieme, si erano trovati in difficoltà nel capirsi. Da questo episodio pare emerga una considerazione, e cioè che il linguaggio che si crea in classe debba essere condiviso sia tra il docente e gli alunni ma anche tra gli alunni stessi; sembra infatti che, soprattutto nel lavorare con queste modalità caratterizzate fortemente da aspetti socio-relazionali, l'accettazione reciproca di fattori comunicativi e linguistici sia strutturante rispetto alla qualità del lavoro che si vuol condurre.

5.3 Questionario finale

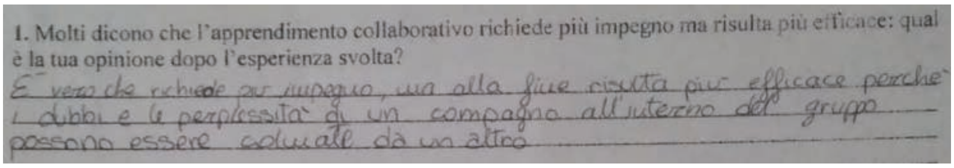
Alcuni studenti avevano espresso l'esigenza di riassumere globalmente i nodi concettuali che si erano via via affrontati durante gli interventi. Per rispondere a questo bisogno è stato scelto, sia per non allungare le tempistiche ipotizzate in fase di progettazione, sia per non forzare ulteriormente le abitudini degli studenti e rassicurarli con una fase conclusiva a loro familiare, di non far costruire agli alunni tale riassunto; è stato dunque l'insegnante, sempre in modalità dialogata con la classe, a presentare una mappa riassuntiva nella quale emergevano gli snodi concettuali degli argomenti trattati (Allegato 9).
È stato quindi somministrato loro il questionario conclusivo del percorso, le cui risposte sono state raccolte e analizzate di seguito. In classe erano presenti 19 studenti su 21. Si è voluto infine procedere ad una discussione collettiva, mediata dall'insegnante, nella quale gli studenti potessero esprimere liberamente la propria idea riguardo al percorso.

Domanda 1. *Molti dicono che l'apprendimento collaborativo richiede più impegno ma risulta più efficace: qual è la tua opinione dopo l'esperienza svolta?*
La Tabella 1 mostra una panoramica delle categorie di risposta degli studenti alla domanda 1.

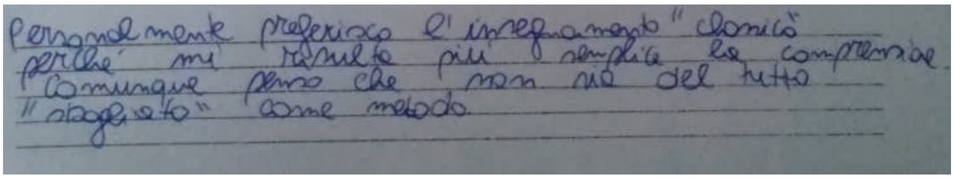
CATEGORIE DI RISPOSTA	NUMERO DI STUDENTI
a. Più impegnativo e non efficace	2
b. Impegno ed efficacia sono uguali alle lezioni tradizionali	2
c. Più impegnativo, l'efficacia dipende dal gruppo	5
d. Più impegnativo ma efficace o abbastanza efficace.	2
e. Non è detto che sia più impegnativo, ma sicuramente più efficace.	8

Tabella 1
Categorie di risposta degli studenti alla domanda 1.

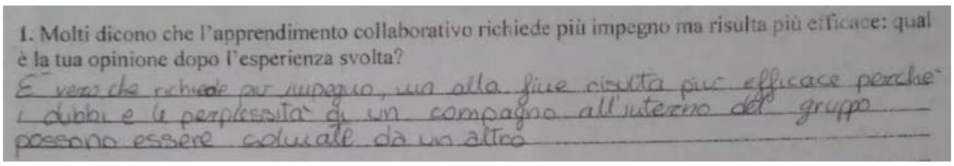
Più della metà dei presenti (10 studenti) ha un'opinione complessiva positiva, in termini di efficacia, del percorso tra pari effettuato (categorie d. ed e.). Il protocollo seguente mostra una delle risposte interpretabili in questo senso.

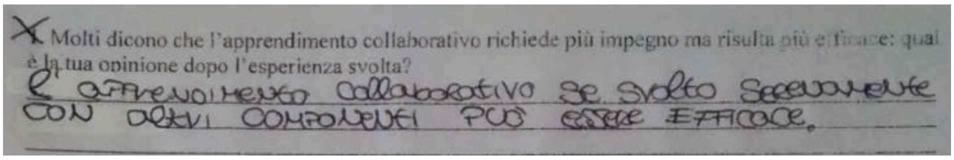

1. Molti dicono che l'apprendimento collaborativo richiede più impegno ma risulta più efficace: qual è la tua opinione dopo l'esperienza svolta?
È vero che richiede più impegno, ma alla fine risulta più efficace perché i dubbi e le perplessità di un compagno all'interno del gruppo possono essere soluate da un altro

4 studenti, invece, esemplificati dal protocollo seguente, dichiarano di non aver percepito tale tipo di lavoro come utile, o comunque non riconoscono un valore aggiunto di questo metodo per il proprio apprendimento rispetto alla lezione frontale (categorie a. e b.).


Personalmente preferisco l'insegnamento "classico" perché mi risulta più semplice la comprensione. Comunque penso che non sia del tutto "sbagliato" come metodo.

5 risposte, esemplificate dai due protocolli sotto, riguardano gli studenti che dichiarano (categoria c.) come l'efficacia generale non possa essere valutata a prescindere dal gruppo a cui si appartiene o dal tipo di attività e argomenti trattati.


1. Molti dicono che l'apprendimento collaborativo richiede più impegno ma risulta più efficace: qual è la tua opinione dopo l'esperienza svolta?
È vero che richiede più impegno, ma alla fine risulta più efficace perché i dubbi e le perplessità di un compagno all'interno del gruppo possono essere soluate da un altro

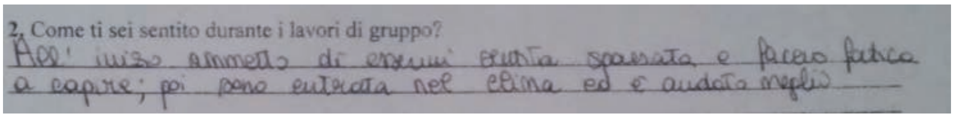

Molti dicono che l'apprendimento collaborativo richiede più impegno ma risulta più efficace: qual è la tua opinione dopo l'esperienza svolta?
L'APPRENDIMENTO COLLABORATIVO SE SVOLTO SERIAMENTE CON ALTRI COMPONENTI PUÒ ESSERE EFFICACE.

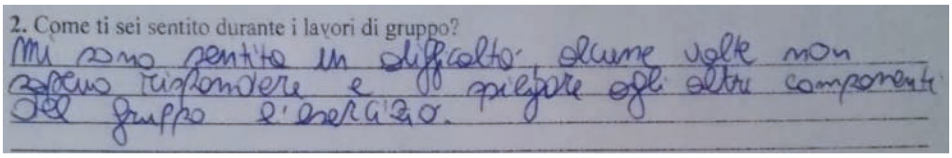
Domanda 2. *Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?*

CATEGORIE DI RISPOSTA	NUMERO DI STUDENTI
a. Ansia / preoccupazione / sotto pressione	5
b. A volte in difficoltà ma abbastanza a proprio agio	4
c. Bene / a proprio agio / gratificato	7
d. Incoraggiato / coinvolto	3

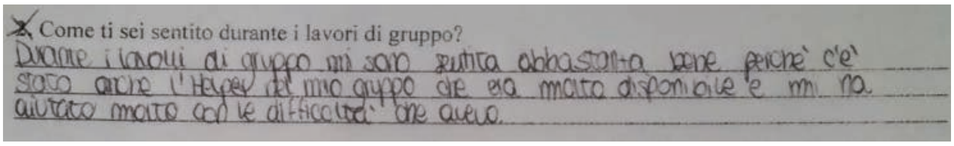
Tabella 2
Categorie di risposta degli studenti alla domanda 2.

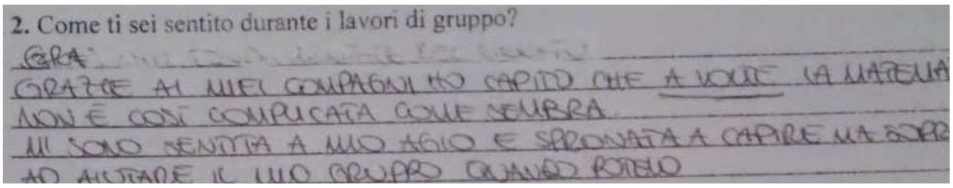
La **Tabella 2** mostra le categorie di risposta degli studenti alla seconda domanda. Dall'analisi globale delle risposte emerge la presenza di emozioni sia spiacevoli, associate a stati di ansia o preoccupazione, sia emozioni piacevoli. Nello specifico, su 19 studenti, 9 dichiarano di aver provato in alcuni o molti casi emozioni spiacevoli (categorie a. e b.). Tra questi, i protocolli sotto mostrano come tali emozioni siano da ricercare nel tipo di approccio metodologico proposto e nella percezione delle caratteristiche del ruolo di helper.

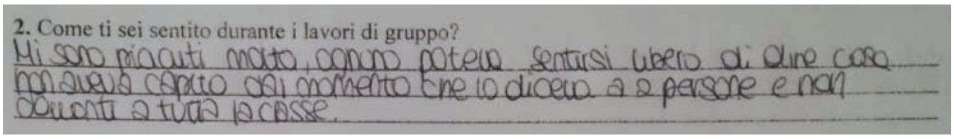

2. Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?
All'inizio ammetto di essermi sentita spaesata e facevo fatica a capire; poi sono entrata nel clima ed è andato meglio


2. Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?
Mi sono sentito in difficoltà, alcune volte non sapevo rispondere e spiegare agli altri componenti del gruppo l'esercizio.

10 studenti invece (categorie c. e d.) dichiarano di essersi sentiti prevalentemente a proprio agio, se non addirittura incoraggiati dal gruppo, come evidenziato dai seguenti protocolli. Nel secondo protocollo si evidenzia anche il caso di uno studente che ha vissuto un'esperienza positiva in termine della propria relazione con la matematica.


2. Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?
Durante i lavori di gruppo mi sono sentita abbastanza bene perchè c'è stato anche l'Helper del mio gruppo che era molto disponibile e mi ha aiutato molto con le difficoltà che avevo.


2. Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?
GRA
GRAZIE AI MIEI COMPAGNI HO CAPITO CHE A VOLTE LA MATEMATICA NON È COSÌ COMPLICATA COME SEMBRA.
MI SONO SENTITA A MIO AGIO E SPRONATA A CAPIRE MA SOPR
AD AIUTARE IL MIO GRUPPO QUANDO POTEVO

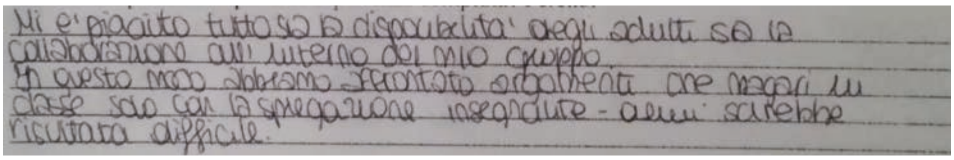

2. Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?
Mi sono piaciuti molto, ognuno poteva sentirsi libero di dire cosa non aveva capito dal momento che lo diceva a 2 persone e non davanti a tutta la classe.

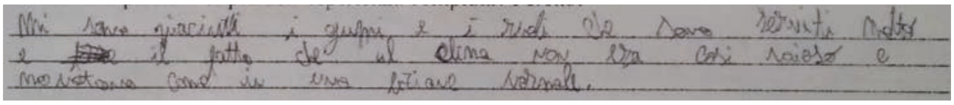
Domanda 3. *Cosa ti è piaciuto di più dell'esperienza compiuta? Perché?*

CATEGORIE DI RISPOSTA	NUMERO DI STUDENTI
a. Capire da soli / passare dalla pratica alla teoria	3
b. Collaborazione / discussione / dialogo / confronto con i compagni	12
c. Lavorare insieme ai compagni ma con il supporto del docente	2
d. Riassunto finale del percorso	1
e. Sesta giornata: lavoro individuale e poi a gruppo	1

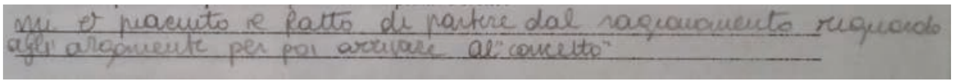
Tabella 3
Categorie di risposte degli studenti alla domanda 3.

La **Tabella 3** mostra le categorie di risposta degli studenti alla terza domanda. Il dato che emerge maggiormente riguarda gli aspetti positivi legati al lavorare, collaborare e confrontarsi insieme ad altri compagni. 12 studenti su 19 affermano che la possibilità di discutere e dialogare tra pari sia stato il punto più piacevole di tutto il percorso. Se si considera anche chi vede come fondamentale il supporto del docente al lavoro di gruppo, il numero sale a 14. Sotto vengono mostrati due protocolli significativi in questo senso; nel secondo viene evidenziato anche il carattere meno monotono e noioso dell'esperienza condotta rispetto alla lezione tradizionale.

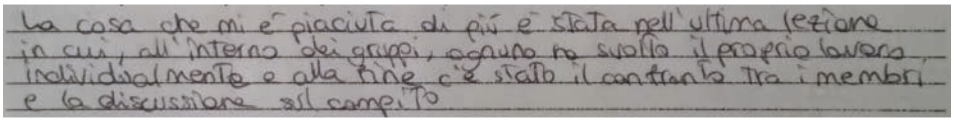

Mi è piaciuto tutto sia la disponibilità degli adulti sia la collaborazione all'interno del mio gruppo.
In questo modo abbiamo affrontato argomenti che magari in classe solo con la spiegazione insegnante - alunni sarebbe risultata difficile.


Mi sono piaciuti i gruppi e i ruoli che sono serviti molto e il fatto che il clima non era così noioso e monotono come in una lezione normale.

Significativo anche il fatto, esemplificato dal protocollo seguente, che 3 studenti apprezzino il tipo di lavoro cognitivo richiesto, nel quale non veniva proposta una regola da applicare ma si veniva
guidati in un ragionamento per arrivare a scoprire significati, costruendo pian piano un'impalcatura di concetti collegati fra loro.


mi è piaciuto il fatto di partire dal ragionamento riguardo agli argomenti per poi arrivare al "concetto"

Uno studente ribadisce l'importanza che per lui ha rivestito il momento finale di riepilogo di tutto il percorso appena vissuto attraverso la mappa, mentre un altro sottolinea come sia stato particolarmente significativo il sesto intervento, nel quale è stata messa in pratica una dinamica del tipo lavoro individuale – confronto di gruppo (protocollo di seguito).


La cosa che mi è piaciuta di più è stata nell'ultima lezione in cui, all'interno dei gruppi, ognuno ha svolto il proprio lavoro individualmente e alla fine c'è stato il confronto tra i membri e la discussione sul compito

Domanda 4. *Cosa ti è piaciuto di meno dell'esperienza compiuta? Perché?*

CATEGORIE DI RISPOSTA	NUMERO DI STUDENTI
a. Gestione interna ai gruppi / gestione dei ruoli	4
b. Apprendimento per scoperta	11
c. Mancanza di materiale su cui studiare a casa	3
d. Niente	2

Tabella 4
Categorie di risposta degli studenti alla domanda 4.

In questa ultima tabella (nella quale compaiono 20 risposte in quanto qualche studente ha evidenziato più elementi) emergono le percezioni negative degli alunni rispetto all'esperienza condotta. In primo luogo, come esemplificato dai protocolli sotto, si può notare come l'apprendimento per scoperta sia stato vissuto in modo non facile dalla maggior parte degli studenti (categoria b.). 11 allievi dichiarano infatti di non aver apprezzato il tentativo di condurli ad appropriarsi dell'argomento proposto senza la preliminare spiegazione dell'insegnante.

> Quando ci davano le schede di attività e dovevamo scoprire da soli a cosa serviva una determinata cosa, preferisco una lezione facciale in cui il prof spiega.

> Cose che non ho capito bene alcuni procedimenti e mi è risultato complicato risolvere gli esercizi senza la spiegazione

I protocolli di seguito sono riferiti ai 4 studenti (categoria a.) che lamentano di aver vissuto in modo negativo la gestione dei gruppi, sia per quanto riguarda il senso dei tre ruoli, sia per il fatto di aver dovuto modificare spesso i componenti del proprio gruppo (l'autore del protocollo faceva parte del gruppo F, modificato tre volte nel corso degli interventi).

> Forse i tre ruoli distinti all'interno del gruppo che limita un po' le capacità al suo interno

> Forse il procedimento di dedurre la regola e non studiarla così com'è, penso che possa mettere più confusione e spesso a me ha fatto così. E' poi il fatto che ho cambiato gruppo praticamente sempre, i gruppi venivano mischiati spesso quando mancava qualcuno e forse questo non è bene.

3 studenti (categoria c.) scrivono che la mancanza di materiali su cui studiare e ripassare a casa è stata inizialmente vissuta in modo problematico. Tali studenti, come espresso nel protocollo sotto, evidenziano anche come il dialogo con gli insegnanti sia stato efficace per arrivare a risolvere la situazione.

> Non ci sono cose che non mi sono piaciute. Soltanto all'inizio quando non avevamo materiale su cui poter ripassare la materia, però l'abbiamo fatto notare ai prof e ci hanno dato il materiale che utilizzavamo a scuola.

2 studenti infine (categoria d.) dichiarano come non ci sia stato nulla di spiacevole nell'esperienza, e come il percorso sia stato stimolante.

> E' stato tutto bello e stimolante

5.4 Discussione collettiva

Terminata la raccolta dei questionari, è stata stimolata dall'insegnante una messa in comune delle considerazioni, dei punti di forza e delle problematiche avvertite dagli studenti. Alcuni alunni hanno scelto di condividere con il resto della classe le proprie idee sull'attività. C'è chi, come F., ha dichiarato di aver «capito molto in questa lezione di riepilogo con la mappa», chi come I. ha sostenuto che

> «con questo progetto ogni persona è riuscita a capire come riesce ad apprendere meglio (…) se ha bisogno di fare esercizi insieme a qualcuno o se ha più bisogno di una lezione frontale».

Un'altra studentessa ha confessato di aver avuto la sensazione di «non padroneggiare durante il percorso le conoscenze».

A. invece parla in questi termini:

> «Io prof all'inizio ero molto spaesata, non riuscivo proprio perché sono sempre stata abituata a questo metodo della… lezione frontale… quindi ero… però dopo secondo me è stata più una questione di aprirsi…mettersi alla prova… cioè se uno parte già con l'idea "non lo accetto" dopo è difficile che… dopo io sono riuscita».

In seguito alla domanda dell'insegnante: «Lo rifareste?», si è sviluppata una discussione interessante, riportata di seguito.

F. «Io vorrei provarlo con fisica».
M.: «Esatto!».
I.: «Io non so se lo rifarei perché mi sono sentita molta responsabilità e in una materia del genere… insomma...».
A.: «Ad esempio prof io nell'ultima attività… io non sono riuscita a concentrarmi bene sul secondo perché magari ho fatto il primo però… loro avevano bisogno, quindi dovevo aiutare loro e quindi non ho potuto fare il mio meglio».
Insegnante: «E per te è stato un male?».
A.: «No, cioè… perché comunque dai se loro hanno capito…».
C.: «Vuol dire che l'ho capito anche io se lo so spiegare… infatti secondo me il problema è quando sei l'helper e non hai capito».
I.: «A me la cosa che gli helper rimanevano fissi non mi è piaciuta per niente. Secondo me anche l'helper doveva cambiare perché alla fine fare l'helper ti mette molto di più alla prova rispetto agli altri due ruoli».
M.: «Ma chi ha difficoltà non può fare l'helper… come fa se non ha capito niente ad aiutare gli altri?».
I.: «Forse potrebbe essere così, che l'helper almeno nelle attività iniziali deve essere uno che ha più facilità, poi potrebbe variare perché a quel punto dovrebbero essere conoscenze abbastanza condivise».
Diverse voci: «Sì, sì esatto».
I.: «Sì però, nel mio gruppo… il fatto che io fossi l'helper non era rilevante perché alla fine ci aiutavamo tutte e bene o male… se magari qualcuno non aveva capito ok, arriva l'helper e cerca di spiegare… però da noi c'era collaborazione e alla fine i ruoli erano… irrilevanti».
V.: «Secondo me il ruolo dell'helper è troppo… cioè è difficile che uno alla pari

riesca a spiegare come un professore. Cioè è troppa responsabilità secondo me perché non sono un professore che ha tutte le conoscenze d'insieme… però io di andare a spiegare ad un'altra persona quando rischio di avere delle lacune io, trasmetterle a lui.».

C.: «Io infatti mi sono sentita male a un certo punto perché… cioè se io non riuscivo a capire… non riusciva a capire nessuno».

M.: «Beh però infatti comunque c'era sempre il prof o Alessandro».

Insegnante: «L'helper in teoria non doveva essere la persona che… già sapeva le cose… era più un ruolo da guida… guidare la discussione all'interno del gruppo, guidare per cercare strategie, poteva anche essere semplicemente quello che diceva a un certo punto "io non ho capito: chiediamo al prof"… però è vero… è un ruolo problematico».

(…)

I.: «Un'altra cosa è che essendo in gruppo, ci sono le persone che capiscono di più e quelle che capiscono meno… e quelle che capiscono meno molto spesso stanno in silenzio. Quindi ci si trova in difficoltà, nel senso… nella lezione frontale alla fine è il professore che secondo me riesce a capire subito chi ha capito oppure no; mentre comunque tra coetanei è difficile: io ero l'helper e non riuscivo a capire… cioè per me a un certo punto avevano capito tutti e finiva lì. Poi magari arrivava lei o Alessandro e veniva fuori che non tutti avevano capito e quindi forse questa è una pecca. Però poi alla fine nei momenti di riepilogo finale gestiti da lei… ecco lì era produttivo».

M.: «Nel mio gruppo invece era il contrario. Io ero l'helper e cercavo di far spiegare a loro le cose per capire se avevano capito realmente, verificavo se loro avevano capito».

G.: «Io per esempio nei gruppi… cioè con questa modalità, come ha detto Filippo, mi sono trovata bene. Mi è servita come cosa».

N.: «Io alla fine mi sono trovata bene… però… cioè come abbiamo fatto di raccogliere alla fine tutto quello che avevamo imparato… come abbiamo fatto oggi… però ogni volta».

V.: «Anche magari più esercizi da dare a casa da soli per verificare se abbiamo capito quello che abbiamo fatto in classe perché… arrivavo a casa, magari avevo qualche esercizio però…».

Da questi stralci di discussione emergono alcuni punti di riflessione, in parte già evidenziati. In primo luogo, a parlare e ad esprimere disappunto e criticità sono quasi sempre gli helper: questo ruolo è stato dunque vissuto da chi ne ha avuto l'incarico in modo problematico e, sebbene si riconosca che l'insegnante era comunque sempre disponibile, con una pressione nei confronti degli altri studenti che ha caricato di una responsabilità percepita a volte come eccessiva. Inoltre, le voci degli studenti che esprimono soddisfazione per il lavoro riguardano alunni con andamento scolastico in matematica non positivo: il fatto che per questi studenti il lavoro sia stato efficace potrebbe riguardare il sentirsi a proprio agio nel dichiarare ad un proprio pari, invece che all'insegnante, il non aver capito qualcosa e il sentirsi più liberi di condividere dubbi ed eventuali errori nei ragionamenti matematici (Spagnuolo & Lazzari, 2018). Un altro dato che emerge riguarda nuovamente il rapporto degli studenti con una consolidata esperienza con la lezione frontale: sembra che, nonostante si riconosca la presenza di momenti di riepilogo conclusivi di ogni scheda e il supporto dell'insegnante e del ricercatore durante i lavori di gruppo, l'abitudine ad una modalità più trasmissiva della conoscenza abbia provocato un generale senso di spaesamento.

6 Conclusioni

In generale, pur con i distinguo evidenziati nell'analisi, è possibile affermare che l'esperienza nella sua globalità è stata apprezzata dagli studenti, pur avendo avuto un carattere di novità per due motivi: il primo è legato all'apprendimento per scoperta, il secondo alla *peer tutoring*. Complessivamente, si può affermare che la maggior parte delle criticità emerse e dichiarate dagli studenti hanno riguardato l'affrontare per la prima volta, questi due approcci. Per attenuare questo effetto di spaesamento occorre sicuramente riproporre percorsi analoghi, per far sì che gli studenti si abituino ad un tipo di lavoro nel quale la componente attiva e di costruzione dell'apprendimento è demandata sia all'allievo individualmente che in gruppo. Realizzare altri percorsi di questo tipo è di grande utilità anche per l'insegnante: gli permette di correggere errori di progettazione, familiarizzare con le difficoltà che incontreranno gli studenti, costruirsi una serie di strumenti e pratiche efficaci di gestione dei gruppi. Alcune delle problematiche emerse durante il percorso sono già note nella letteratura relativa all'apprendimento a gruppi, e sono principalmente legate a fenomeni di deriva produttivistica nei quali lavora solo lo studente tutor a discapito della comprensione di studenti più deboli, e casi in cui gli studenti più bravi non si riconoscono e rifiutano il nuovo tipo di lavoro (Carletti & Varani, 2005, p. 185). Tale rifiuto è risultato quasi assente negli studenti più deboli matematicamente; sembra piuttosto che tali alunni siano quelli che hanno ricavato maggiori gratificazioni sia in termini di comprensione degli argomenti trattati, sia in termini di benessere generale: si affievoliscono sensazioni come la noia e l'inadeguatezza nei confronti delle difficoltà nella disciplina a favore di un maggiore coinvolgimento cognitivo nelle attività proposte e di una maggiore motivazione all'interazione sociale finalizzata alla risoluzione di un compito.
Per quanto riguarda l'efficacia dei gruppi in funzione dei ruoli di helper, controller e recorder utilizzati nel percorso, si può affermare in generale che:

- nei gruppi in cui l'helper, eventualmente dopo il supporto dell'insegnante, riesce a gestire il carico cognitivo delle schede e le dinamiche sociali interne risultano funzionanti (A, B e C), il lavoro interno al gruppo sembra essere efficace per tutti i membri del gruppo;
- nei gruppi in cui l'helper, eventualmente dopo il supporto dell'insegnante, riesce a gestire il carico cognitivo delle schede ma le dinamiche sociali interne sono problematiche (F, G), il lavoro interno al gruppo non sembra essere efficace per il controller e per il recorder;
- nei gruppi in cui l'helper non riesce neanche dopo il supporto dell'insegnante a gestire il carico cognitivo e le dinamiche sociali interne risultano funzionanti (D ed E), la comprensione dei concetti è vincolata ai momenti di riepilogo e messa in comune a grande gruppo.

Nella modalità di lavoro si è cercato di impostare una continua dialettica fra due estremi della relazione fra studente e apprendimento: da un lato si lasciavano lavorare i gruppi in modo autonomo, dall'altro si sono costantemente realizzati momenti di condivisione e istituzionalizzazione e di intervento sul singolo dubbio interno ai gruppi. Questo continuo rimando fra apprendimento autonomo e orchestrazione dell'insegnante sembra essere stato efficace sia per condurre gli allievi a padroneggiare il sapere in gioco, sia per arginare e rassicurare la classe rispetto allo spaesamento nei confronti di un approccio nuovo all'apprendimento. Dal punto di vista dell'insegnante, il percorso realizzato ha permesso di prendere consapevolezza di quanto sia efficace un approccio alla didattica che tenti di integrare, in modo sinergico e funzionale al contesto classe, varie metodologie.

Per un'analisi generale dell'efficacia dei tre metodi di *peer education* in relazione alle conoscenze matematiche degli alunni, si rimanda a Spagnuolo (2017a). Quello che interessa qui evidenziare riguarda uno dei risultati della ricerca condotta da Spagnuolo: sembra che quando gli argomenti trattati sono completamente sconosciuti dagli studenti, la modalità di raggruppamento più efficace in termini di apprendimento sia quella di *peer tutoring*, dunque quella utilizzata nel percorso realizzato e descritto in questo articolo. Analoghi risultati sono emersi anche in una ricerca effettuata con classi della scuola elementare (Arrigo, Maurizi & Minazzi, 2004).

Bibliografia

Arrigo, G., Maurizi, L., & Minazzi, T. (2004). Chi spiega impara a mettere i pensieri bene: la comunicazione intenzionale in matematica. *La Matematica e la sua Didattica*. Bologna: Pitagora.

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2011). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications. 31* (1), 20-30.

Brousseau, G. (1983). *Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'État. Université de Bordeaux I.

Carletti, A., & Varani, A. (a cura di) (2005). *Didattica costruttivista: dalle teorie alla pratica in classe*. Edizioni Erickson.

Comoglio, M. (2000). *Educare insegnando. Apprendere ad applicare il cooperative learning*, Roma: LAS.

Comoglio, M. (1996). Verso una definizione del Cooperative Learning. *Animazione Sociale*, 4.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*, Trento: Erickson.

Damon, W., & Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International Journal of Educational Research, 13*(1), 9-19.

Di Martino, P. (2015). I fattori affettivi e il loro ruolo nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 38 A-B* (3), 343-362.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics*, 61*(1-2), 103-131.

Morin, E. (2015). *Insegnare a vivere. Manifesto per cambiare l'educazione*. Milano: Raffaello Cortina editore.

Pellerey, M. (2014). Che cosa abbiamo imparato sul piano della progettazione didattica dalle critiche al costruttivismo in ambito pedagogico? *Giornale Italiano della Ricerca Educativa, 13*(VII), 262.

Pesci, A. (2004). Insegnare e apprendere cooperando: esperienze e prospettive, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 27*A-B(6) 637-670.

Pesci, A. (2010). *Cooperative Learning and Peer Tutoring to Promote Students' Mathematics Education*.

Spagnuolo, A. (2017a). *The effects of the equality parameter on mathematics students' performance. A comparative analysis of Peer Education interventions in teaching-learning of linear and quadratic functions*. Tesi di dottorato. Università degli Studi di Ferrara.

Spagnuolo, A. (2017b). Difficoltà nell'applicazione di metodologie cooperative per l'insegnamento della Matematica nella scuola secondaria di II grado. Alcune riflessioni sullo sviluppo dei processi argomentativi. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente, 9*(14), 127-145.

Spagnuolo, A., & Lazzari, E. (2018). Metodologie di peer education in matematica: alcune riflessioni sulle problematiche socio-relazionali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 41*B(1), 53-83.

Autore/Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI di Locarno, Svizzera
michele.canducci@supsi.ch

Studio di fattibilità per la posa di pannelli fotovoltaici sul tetto della scuola media di Minusio[1]

Feasibility study for the installation of photovoltaic panels on the roof of a middle school in Minusio

Sara Cataldi Spinola
Scuola media Minusio, Svizzera

Sunto / Il progetto, uno studio di fattibilità per la posa di pannelli fotovoltaici sul tetto dello stabile scolastico, è pensato per una terza media, ma può essere adattato ad una quarta media e, data l'interdisciplinarità della tematica trattata, ben si presta a coinvolgere diverse discipline oltre alla matematica, quali le scienze, l'italiano, l'educazione civica e l'informatica. Nel corso del progetto, nato da un interesse espresso dagli stessi allievi di terza di un corso attitudinale di matematica, oltre a sviluppare una serie di competenze prettamente matematiche, i ragazzi acquisiscono consapevolezza di quanti aspetti sia necessario considerare prima di arrivare all'inoltro di una domanda di costruzione (es: leggi e regolamenti comunali/cantonali/federali inerenti il tema trattato, struttura dei locali tecnici della scuola, stime degli utilizzi energetici, componenti di un impianto fotovoltaico e loro funzionamento, dimensionamento e posizionamento dell'impianto) e di quale possa essere l'impatto ambientale di questa scelta in termini di sostenibilità. Inoltre, il progetto ben si adatta a promuovere lo sviluppo di una competenza trasversale essenziale, quale il pensiero riflessivo e critico, e propone alcuni strumenti di monitoraggio per la competenza considerata.
A fine progetto, gli allievi hanno riassunto in un dossier cartaceo e in un podcast quanto emerso dallo studio.

Parole chiave: interdisciplinarità, competenze trasversali, matematica applicata, pensiero riflessivo e critico.

Abstract / This project, a research study regarding the installation of photovoltaic panels on the roof of a school building, is designed for a eighth grade, but can be adapted to a ninth grade and, given the interdisciplinary nature of the topic, it involves different disciplines (other than mathematics) such as italian, civics and informatics.
During the project, born from an interest expressed by the eight year students of an aptitude course in mathematics, in addition to developing a series of purely mathematical skills, the students acquire awareness of how many aspects need to be considered before being able to present a formal construction application (eg: municipal / cantonal / federal laws and regulations regarding the subject matter, structure of the school's technical rooms, estimates of energy use, components structure of a photovoltaic system, sizing and positioning of the plant) and about the environmental impact of this choice in terms of sustainability. Furthermore, the project is designed in order to promote an essential transversal competence, such as reflective and critical thinking, and proposes some competence monitoring tools.
At the end of the project, the students summarized what emerged from the study in a paper dossier and in a podcast.

Keywords: interdisciplinarity, transversal skills, applied mathematics, reflective and critical thinking.

1. Una versione approfondita di questa sperimentazione, che evidenzia maggiormente i legami esistenti con il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015), sarà prossimamente pubblicata sul portale didattico ScuolaLab del Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. Il progetto è stato elaborato nell'ambito del CAS "Progettare per competenze" e più precisamente all'interno del laboratorio di formazione generale e di competenze trasversali.

1 Premessa

Sulla base di un interesse manifestato dagli stessi ragazzi di terza media, corso attitudinale, e delle loro esperienze familiari in merito all'utilizzo dell'energia portata dalla luce, si è proposto loro di cimentarsi in uno studio di fattibilità per la posa di un impianto fotovoltaico sul tetto della loro scuola.
L'idea del progetto è nata, a inizio anno scolastico, durante una discussione spontanea con i ragazzi che, in una giornata soleggiata, hanno domandato se sul tetto della scuola vi fossero dei pannelli fotovoltaici. Scoprendo che non vi è alcun pannello di tal genere, si sono chiesti come mai un edificio così soleggiato per tutto l'anno non avesse un impianto atto a sfruttare l'energia portata dalla luce.
Durante la discussione, è emerso che alcuni di loro avevano già visto un impianto fotovoltaico, a casa loro o a casa di conoscenti. Inoltre, data l'imminente votazione sulla strategia energetica 2050, c'era in classe un interesse molto diffuso sull'argomento.
Partendo da questo interesse spontaneo, si è proposto agli studenti di realizzare insieme uno studio per verificare la possibilità di installare un impianto fotovoltaico sul tetto dell'edificio scolastico. Si è pensato anche di far presentare ai ragazzi l'esito dello studio mediante due prodotti: un dossier cartaceo e un podcast.

Il percorso progettato e messo in atto, oltre a veicolare competenze e conoscenze disciplinari specifiche della matematica, consente di rispondere ad altre esigenze educative: innanzi tutto lo sviluppo del pensiero riflessivo e critico che costituisce la competenza focus del progetto; inoltre la sensibilizzazione a tematiche di consumi e sostenibilità ambientale anche in riferimento alle scelte espresse dal popolo svizzero con la votazione del 21 maggio 2017 sulla "Strategia energetica 2050"; infine l'educazione ad un uso consapevole dei media.
Data la complessità del progetto, l'attività si articola in due contesti di formazione generale che sono interconnessi: "Contesto economico e consumi" (DECS, 2015, pp. 44-46) e "Tecnologie e media" (DECS, 2015, pp. 52-54).
Lo sviluppo economico e tecnologico, così come l'aumento dei consumi e dei mezzi di comunicazione, modificano continuamente le abitudini di vita del singolo e delle comunità e, contemporaneamente, generano disparità e disequilibri economici e sociali. Le risorse non sono inesauribili. È essenziale che i ragazzi siano aiutati a porsi in modo critico di fronte agli attuali modelli di sviluppo, che prendano consapevolezza dell'impatto sull'ambiente e sulla collettività, a breve e a lungo termine, delle proprie abitudini di vita e che sappiano criticamente modificarle a beneficio dell'ambiente e della comunità stessa.

Quanto all'educare ad un uso consapevole dei media, le tecnologie di cui disponiamo nel mondo contemporaneo, e che sono alla portata dei ragazzi nella quotidianità, offrono numerosi vantaggi: accorciano le distanze e consentono un accesso rapido a una molteplicità di informazioni. Se ciò consente indubbiamente un arricchimento delle conoscenze, è anche vero che sottopone i ragazzi ad un sovraccarico mediatico e ad una molteplicità di sollecitazioni.
Oggi è più che mai necessario metterli in condizione di saper scegliere tra le informazioni disponibili, selezionare le fonti, aiutarli cioè a sviluppare il pensiero riflessivo e critico per poter usare in modo razionale e responsabile le tecnologie disponibili, e

non farsi condizionare o soggiogare da esse.

È necessario quindi che la scuola e gli insegnanti forniscano loro strumenti per gestire le tecnologie in modo consapevole e li educhino ad un uso personale "etico" dei media, attenti a ciò che si vuol pubblicare, nel rispetto delle norme su privacy e copyright, e consapevoli delle proprie responsabilità e delle possibili conseguenze di un eventuale utilizzo scorretto.

2 Il percorso didattico e il Piano di studio

Il progetto permette di mobilitare una serie di competenze legate alle diverse discipline coinvolte. Alcuni traguardi di apprendimento specifici per le discipline matematica, italiano e tecnologie e media sono descritti nell'Allegato 1.

I processi cognitivi matematici spesso procedono in parallelo allo sviluppo di competenze trasversali.
È innegabile che il saper lavorare flessibilmente in autonomia e in gruppo, il saper attivare strategie di azione consapevoli personali e adeguate al problema e al contesto, il saper comunicare e argomentare le proprie opinioni, utilizzando il corretto linguaggio specifico, in modo che siano comprensibili agli altri, il saper riflettere su procedimenti e risultati, il saper ascoltare opinioni altrui e saper riconsiderare le proprie, siano comportamenti e processi logici centrali per l'apprendimento della matematica, ma spendibili anche in altre discipline e in altri contesti (DECS, 2015, pp. 164-165).

Come già anticipato, l'attività elaborata è strutturata per promuovere lo sviluppo e l'affinamento della competenza "pensiero riflessivo e critico" (DECS, 2015, pp. 36-37), competenza per la quale sono da considerarsi in generale prerequisiti le fasi di conoscenza, comprensione, applicazione, analisi.
Il progetto mobilita inoltre altre competenze trasversali, quali lo "sviluppo personale" (DECS, 2015, pp. 29-31), la "collaborazione" (pp. 32-33) e la "comunicazione" (pp. 34-35). In particolare:

Sviluppo personale
Il progetto promuove lo sviluppo personale attraverso una serie di acquisizioni, scelte, azioni, comportamenti quali:
– mettere a fuoco gli scopi, ossia identificare con chiarezza le finalità del proprio agire;
– progettare un piano d'azione del proprio lavoro coerente con gli scopi e portarlo a termine;
– allargare i propri orizzonti grazie all'approfondimento di un problema nei suoi molteplici aspetti, mobilitando diverse conoscenze;
– sviluppare capacità critiche effettuando scelte responsabili in contesti diversi da quelli noti e familiari, tenendo in considerazione diverse variabili e valutando le soluzioni più favorevoli e vantaggiose;
– acquisire consapevolezza dell'ambito sociale in cui si opera, superando l'egocen-

trismo e interagendo con gli altri in modo organizzato, collaborativo e rispettoso;
- riconoscere l'importanza del rispetto delle regole, sia come consapevolezza del contesto normativo in cui si inserisce il progetto, sia come modalità di interazione con il gruppo di lavoro.

Collaborazione
Il progetto prevede anche momenti di lavoro di gruppo. Pertanto, comporta e promuove competenze di collaborazione, quali:
- sapere individuare i momenti in cui prevale l'apprendimento individuale (ascoltare, prendere appunti, fare domande pertinenti e funzionali al progetto, fare ricerche personali) e i momenti in cui è necessario sapere interagire in modo organizzato e funzionale con un gruppo di lavoro;
- organizzare e suddividere parti di lavoro all'interno di un gruppo;
- comprendere l'obiettivo della parte di lavoro assegnata, impegnarsi responsabilmente e riferire con precisione al gruppo;
- interagire efficacemente nel gruppo rispettando ruoli e regole;
- rispettare i diversi punti di vista senza prevaricare l'altro;
- riflettere sulle dinamiche del gruppo e cercare le modalità per migliorarne il funzionamento.

Comunicazione
Lo sviluppo di buone competenze comunicative è patrimonio indispensabile per la formazione dell'individuo e lo sviluppo personale ed è presupposto fondamentale per un buon inserimento sociale e in contesti lavorativi. La competenza di comunicazione si declina nel progetto in molteplici aspetti:
- sapere comunicare in modo efficace i propri punti di vista, i contributi personali di lavoro, e sapere argomentare usando il registro linguistico adeguato al contesto considerato e al destinatario;
- sapere ascoltare e imparare attraverso l'ascolto (es. relazioni di tecnici e di esperti esterni), annotando le informazioni fondamentali;
- sapere ascoltare i compagni senza interrompere, facendo spazio nella propria mente per il pensiero degli altri, senza tentare di imporre il proprio;
- documentare il lavoro svolto utilizzando diversi linguaggi: presentazione orale, produzione di documentazione scritta, produzione di un podcast suddividendosi i ruoli.

3 Situazione problema

Il progetto, partendo da un interesse concreto dei ragazzi, cioè di valutare la possibilità di dotare il proprio edificio scolastico di un impianto fotovoltaico, fornisce una naturale motivazione iniziale a ricercare, raccogliere ed organizzare informazioni di varia natura e a riflettere su di esse in modo critico. Tutte le informazioni e le serie di dati che via via emergono dal progetto, devono essere analizzati e messi in relazione fra loro per capire se il progetto stesso ha senso, quali sono i potenziali vantaggi e svantaggi e quali sono i benefici perseguibili a lungo termine in ambito di sviluppo sostenibile.

Il podcast stesso è qui usato come strumento per rivedere criticamente e in modo un po' diverso dal solito il proprio lavoro e per valutarne la bontà e la spendibilità. Il podcast è usato anche quale strumento per veicolare, in modo ancora più efficace e complementare ad un dossier cartaceo, il proprio messaggio.
La produzione di questo strumento consente anche di introdurre naturalmente tematiche legate all'uso consapevole delle tecnologie e permette di riflettere in modo critico sui problemi legati al copyright e alla privacy.

ORGANIZZAZIONE DELL'ATTIVITÀ DIDATTICA
Tempo stimato L'attività può avere la durata di un semestre o di un anno, a seconda delle tematiche che si vogliono sviluppare e delle discipline coinvolte. È necessario tenere conto dei tempi tecnici per reperire planimetrie, foto dall'alto dell'edificio scolastico, documentazioni varie, e per organizzare gli interventi di esperti in ambito di tecnologie innovative e rappresentanti delle autorità e degli uffici tecnici comunali.
Spazi Sono necessari diversi spazi di lavoro, quali le aule di matematica, di informatica, di italiano e gli spazi esterni alla sede per le attività all'aperto (es. rilievo dell'orizzonte, effetto di eventuali ombre vicine, misura dell'irraggiamento in funzione dell'orientamento di un modulo fotovoltaico).
Materiali Gli studenti hanno bisogno di una serie di materiali di uso comune, quali le schede di lezione, l'occorrente per scrivere e gli strumenti di geometria, oltre a moduli fotovoltaici di natura diversa e a specifici strumenti di misura per le attività all'aperto (es. sensori per effettuare misure di irraggiamento solare, multimetri, Heliochron e fogli appositi per tracciare il profilo dell'orizzonte, HORIcatcher e macchina fotografica, Solar Pathfinder).

4 Descrizione del percorso didattico

Il lavoro ha richiesto dei tempi tecnici preliminari per reperire materiali non disponibili immediatamente, quali ad esempio la planimetria del tetto, e per prendere contatti con una serie di figure esterne, organizzandone gli interventi secondo le rispettive disponibilità. Sono intervenuti:

- un ingegnere[2] che si occupa di progettazione di impianti fotovoltaici e che ha fornito una serie di spunti, materiali e strumenti, consentendo esperienze concrete di misurazione e diversi approfondimenti;

2. Ingegnere Sandro Rezzonico, Istituto Sostenibilità Applicata all'Ambiente Costruito, SUPSI.

- il capo ufficio tecnico del comune di Minusio[3] e un consigliere comunale[4], nonché membro della Commissione ambiente comunale, che hanno esposto le politiche comunali in termini di energia (es. "Label Città dell'energia", "società 2000 Watt" ecc.) e hanno fornito indicazioni circa l'iter procedurale da seguire per arrivare all'inoltro di una domanda di costruzione per la posa di un impianto fotovoltaico su un edificio comunale/cantonale; 3 – 4
- un formatore ed esperto nell'uso delle tecnologie informatiche[5] a supporto della didattica e delle tematiche connesse alle pubblicazioni in rete (es. copyright, privacy, fonti autorevoli, diritto d'autore ecc.), che ha seguito il progetto a distanza fornendo indicazioni essenziali per la parte inerente la produzione e la pubblicazione in rete del podcast. 5

Il tutto ha comportato anche da parte della docente responsabile del progetto un lavoro di approfondimento in settori non specifici della disciplina di insegnamento e di organizzazione e gestione delle numerose attività e delle diverse fasi di lavoro.
Durante il percorso ci sono stati momenti di lavoro di gruppo e altri di approfondimento individuale, con numerosi momenti di confronto per condividere gli elementi via via acquisiti e per decidere il percorso da seguire di volta in volta. Questa attività ha stimolato costantemente il pensiero riflessivo e critico di ognuno e il confronto. Vi è stato un grande coinvolgimento dei ragazzi nelle diverse fasi di realizzazione del lavoro:

- la prima relativa alla raccolta di informazioni di carattere tecnico, normativo e finanziario;
- la seconda di calcolo e sperimentazione che ha portato al dimensionamento dell'impianto, alla sua esatta collocazione sul tetto ed al costo dell'opera;
- in un terzo momento si è confrontato il costo e il rendimento dell'impianto progettato con il fabbisogno energetico reale della sede e i ragazzi hanno dovuto cimentarsi con la valutazione della bontà e dell'utilità dell'impianto. A questo punto, oltre alla valutazione dei dati puramente tecnici, i ragazzi hanno analizzato in modo approfondito l'opzione ambientale nata nel particolare momento politico in cui il popolo svizzero si è espresso a favore dell'uscita graduale dal nucleare;
- l'ultima fase del lavoro ha riguardato la sintesi di tutti i dati in funzione della presentazione di un dossier cartaceo da consegnare alle autorità comunali e di un podcast da pubblicare in rete, con tutte le problematiche tecniche e normative connesse alla pubblicazione di un prodotto audio/video in rete.

Attività 1
Inizialmente, durante una discussione plenaria si sono raccolte le idee degli allievi in merito a che cosa considerare per iniziare a sviluppare il progetto (brainstorming). Sono emersi i seguenti aspetti da indagare: come calcolare il potenziale di sfruttamento dell'energia solare, come dimensionare l'impianto fotovoltaico, come finanziare l'impianto, quali leggi sono da considerare, come stimare l'utilizzo energetico dello stabile e come realizzare un podcast (Figura 1).

3. Architetto Giorgio Mas.
4. Architetto Paolo Kaehr.
5. Professore Luca Piergiovanni, insegnante di lettere ed esperto di tecnologie dell'apprendimento.

Figura 1
Schema riassuntivo del brainstorming iniziale realizzato da un'allieva.

Successivamente sono stati formati gruppi di lavoro di due/tre allievi ciascuno, incaricati di ricercare online le informazioni richieste in sette schede di lavoro (Allegato 2) a loro assegnate sui seguenti temi: "mappatura solare", "quadro legislativo comunale", "quadro legislativo federale", "domande generali sull'energia portata dalla luce", "installazione di nuovi impianti fotovoltaici e incentivi federali", "installazione di nuovi impianti fotovoltaici e incentivi cantonali" e "cos'è un podcast".
Infine, ogni gruppo ha presentato ai compagni quanto trovato nei siti indicati sulle schede. Nel corso delle diverse presentazioni, gli allievi, prendendo appunti, hanno completato tutte e sette le schede di lavoro.
A questo punto, ai ragazzi è stata somministrata per la prima volta la tabella di autovalutazione per la competenza focus del progetto "pensiero riflessivo e critico" (Allegato 3).
In previsione dell'attività successiva (visita ai locali tecnici), ai ragazzi è stato chiesto di preparare una lista di domande, da sottoporre al custode, per chiarire com'è organizzata la rete di distribuzione dell'elettricità all'interno e all'esterno dello stabile scolastico (Allegato 4).

Attività 2

I ragazzi hanno visitato i locali tecnici della scuola (Figura 2) e hanno potuto sottoporre al custode le domande preparate nell'attività 1. Successivamente, gli studenti hanno preparato un resoconto sui diversi apparecchi visti (Allegato 5).

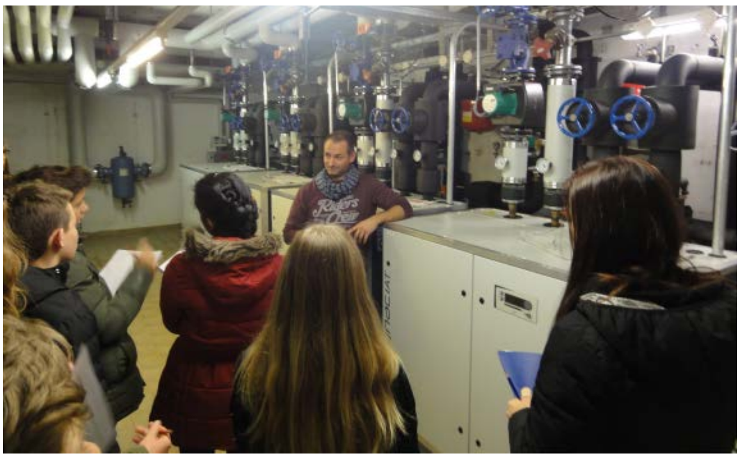


Figura 2
Visita ai locali tecnici della scuola.

Attività 3

Utilizzando i dati ricavati dalla visita ai locali tecnici e dalle informazioni preliminari ricevute dal custode, gli allievi hanno realizzato uno schema riassuntivo della rete di distribuzione dell'energia (**Figura 3**) ed effettuato una stima dell'utilizzo energetico della sede per la sola illuminazione dello stabile (**Allegato 6**).

I ragazzi hanno formato spontaneamente gruppi di due/tre allievi e nell'arco di un paio di settimane hanno preso visione di tutte le lampade presenti negli spazi interni ed esterni allo stabile (aule ordinarie, aule delle materie speciali, palestre, piscina, cortili, giardino ecc.), determinandone la quantità, il tipo e la potenza.

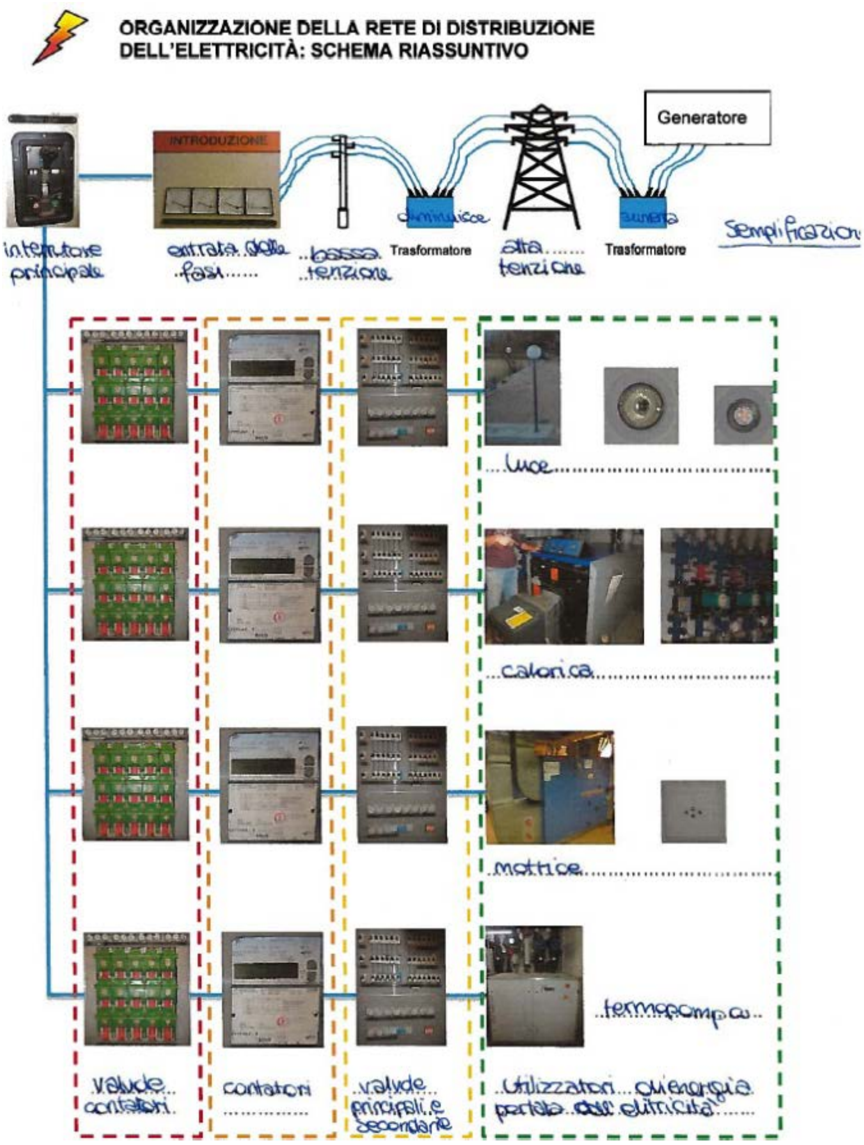


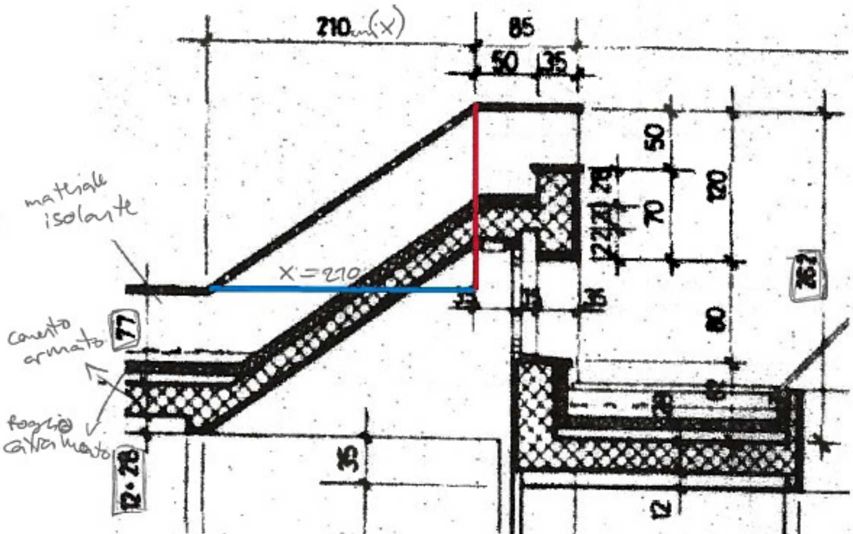
Figura 3
Schema riassuntivo: "Rete di distribuzione dell'energia".

Attività 4

Prendendo in esame la planimetria del tetto, sono stati introdotti e approfonditi i concetti di pendenza e di misure in scala (**Figura 4**) e sono state calcolate le dimensioni reali del tetto stesso, nonché la superficie disponibile per la posa dei pannelli fotovoltaici (**Allegato 7**). Inoltre, in preparazione della successiva lezione con l'ingegnere è stato introdotto il concetto di angolo di inclinazione: angolo compreso fra il pannello fotovoltaico e il piano orizzontale.

Come procederesti per determinare la pendenza della porzione di tetto a una falda evidenziata nella successiva fotografia? Esprimi il risultato in forma decimale e in percentuale.

Ecco un estratto del piano in scala della regione evidenziata nella fotografia precedente. Le misure sono espresse in cm.



12 + 28 + 77 = 117 cm

$\underbrace{\Delta y}_{y_2 - y_1} = 262 - 117 = 145 \qquad p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{145}{210} \cong 0{,}69 = 69\ \%$

Figura 4
Scheda che illustra il dettaglio del tetto dello stabile scolastico e l'estratto del piano in scala dello stesso.

Attività 5

L'ingegnere coinvolto, dopo una breve presentazione teorica in aula, ha coordinato attività all'aperto (**Allegato 8**), inerenti l'Azimut (orientamento del pannello rispetto al sud) e l'angolo di Tilt (angolo di inclinazione) dei pannelli fotovoltaici, il rilievo dell'orizzonte, la misura dell'irraggiamento e la lettura di grafici di irraggiamento.
Durante le attività, i ragazzi hanno preparato il rilievo dell'orizzonte usando l'HORI-catcher e l'Heliochron (**Figura 5**). Questi strumenti permettono di tracciare il rilievo effettivo dell'orizzonte e di confrontarlo con le orbite solari teoriche previste per quel sito, permettendo così di stabilire il fattore di ombreggiamento del sito scelto per la posa dei pannelli fotovoltaici.

Figura 5
Attività all'aperto: rilievo dell'orizzonte mediante l'uso degli strumenti Heliochron (a sinistra) e HORIcatcher (a destra).

Attività 6

In un momento successivo di rielaborazione e sintesi di quanto svolto e appreso durante le attività svolte con l'ingegnere, i ragazzi hanno verificato la correttezza del rilievo dell'orizzonte elaborato da loro confrontandolo con uno preparato mediante l'ausilio di un software apposito. Inoltre, hanno determinato la coppia ottimale di angoli di Tilt e di Azimut per orientare i pannelli in modo da sfruttare al meglio l'energia disponibile portata dalla luce (Figura 6).

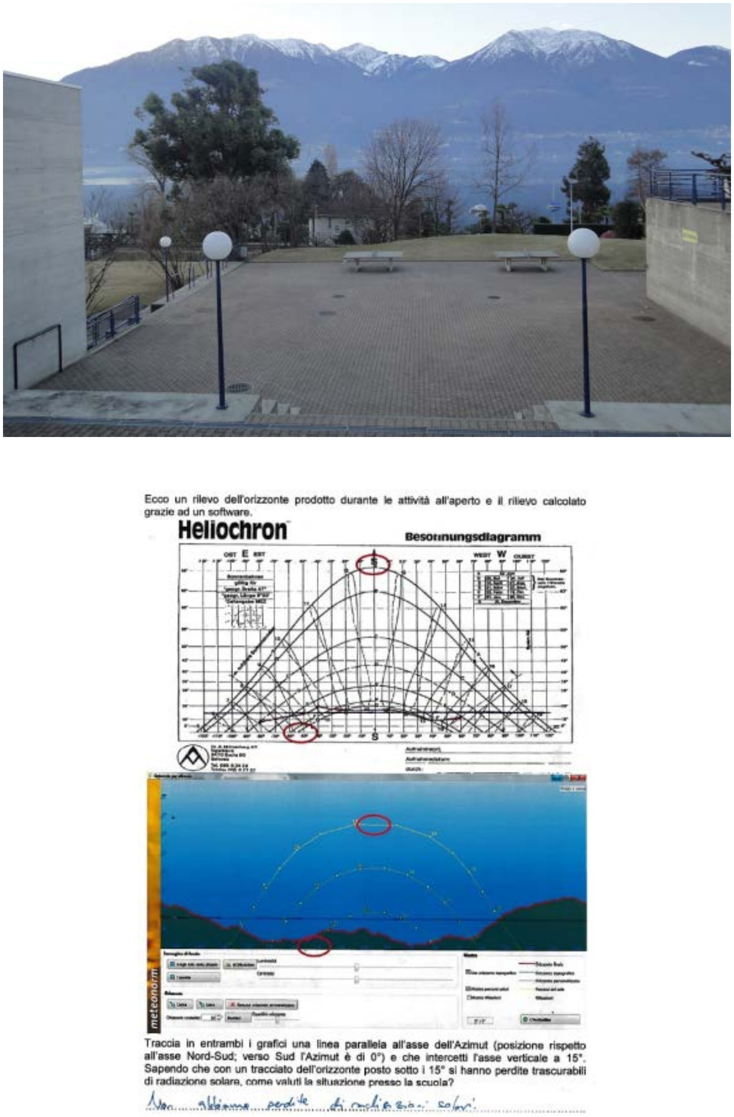


Figura 6
In alto, foto dell'orizzonte a Sud visto dalla scuola.
Sotto, scheda che illustra il rilievo dell'orizzonte prodotto dai ragazzi e il rilievo elaborato mediante un software professionale (Allegato 9).

Attività 7

Per fornire ai ragazzi una visione dettagliata della politica energetica comunale, sono stati invitati due architetti (il capo Ufficio tecnico comunale e un membro della Commissione municipale Ambiente), che hanno fornito approfondimenti sul tema dello sviluppo sostenibile, in particolare sulla "Società 2000 Watt" (visione di sviluppo sostenibile secondo la quale si hanno a disposizione 2000 Watt di potenza continua complessiva pro capite), sul significato di "Label Città dell'energia" (certificazione europea per le città con un'adeguata politica energetica) e sulla "Strategia energetica 2050" (strategia del Consiglio federale atta a ridurre l'utilizzo di energia, aumentare l'efficienza energetica, promuovere le energie rinnovabili e vietare la costruzione di nuove centrali nucleari). Inoltre, i due relatori hanno dato indicazioni in merito alla procedura da seguire per inoltrare una domanda di costruzione per la posa di un impianto fotovoltaico (Figura 7).

I ragazzi hanno preso appunti e hanno potuto approfondire i temi proposti con delle domande e un dibattito finale.

Figura 7
Due momenti delle presentazioni degli architetti.

Attività 8

Tutte le informazioni raccolte durante l'incontro precedente sono state sintetizzate e organizzate compilando apposite schede (Allegato 10), come quella in Figura 8.

Cosa si intende per "*Società 2000 Watt*"?

È una società per la quale si prevede di avere un utilizzo di energia pari a 2000 W per persona all'anno. Questo corrisponde a 48 kWh al giorno oppure a 17500 kWh all'anno.

Qual è l'attuale utilizzo dell'energia, espresso in Watt, in Svizzera?

circa 6300 W per persona all'anno.

"Treat the earth well: it was not given to you by your parents, it was loaned to you by your children. We do not inherit the Earth from our Ancestors, we borrow it from our Children."

Traduzione:

"Tratta bene la terra: non ti è stata data dai tuoi genitori. Ti è stata prestata dai tuoi figli. Noi non ereditiamo la terra dai nostri antenati, la prendiamo in prestito dai nostri figli."

Quale significato ha ora per te questa citazione di un antico proverbio indiano?

Che noi con la terra facciamo quello che facciamo, ma dobbiamo ricordarci che le conseguenze le dovranno subire chi verrà dopo di noi, quindi si tratta bene perchè è in prestito.

Figura 8
Appunti e riflessioni di un'allieva a seguito delle presentazioni dell'attività 7.

Attività 9

In previsione di una seconda lezione con l'ingegnere, i ragazzi sono stati introdotti dalla docente di matematica e scienze al linguaggio dei portatori di energia, dei trasferitori, dei ricevitori (Allegato 11). Hanno inoltre ricevuto alcune informazioni di massima inerenti l'efficienza dei pannelli fotovoltaici attualmente in commercio e hanno preparato un diagramma di flusso dell'energia (Figura 9).

Completa il seguente "*diagramma di flusso dell'energia*" utilizzando le seguenti parole chiave: "*Elettricità*", "*Luce*", "*Aria*", "*Utilizzatori di energia*", "*Portatore di energia*", "*Fonte di energia*", "*Trasferitore di energia*", "*Sistema di raffreddamento*".

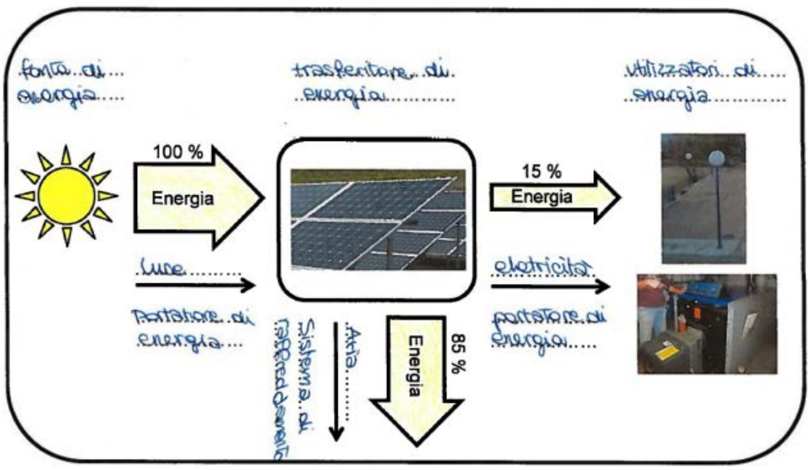


Figura 9
Scheda che illustra il diagramma di flusso dell'energia.

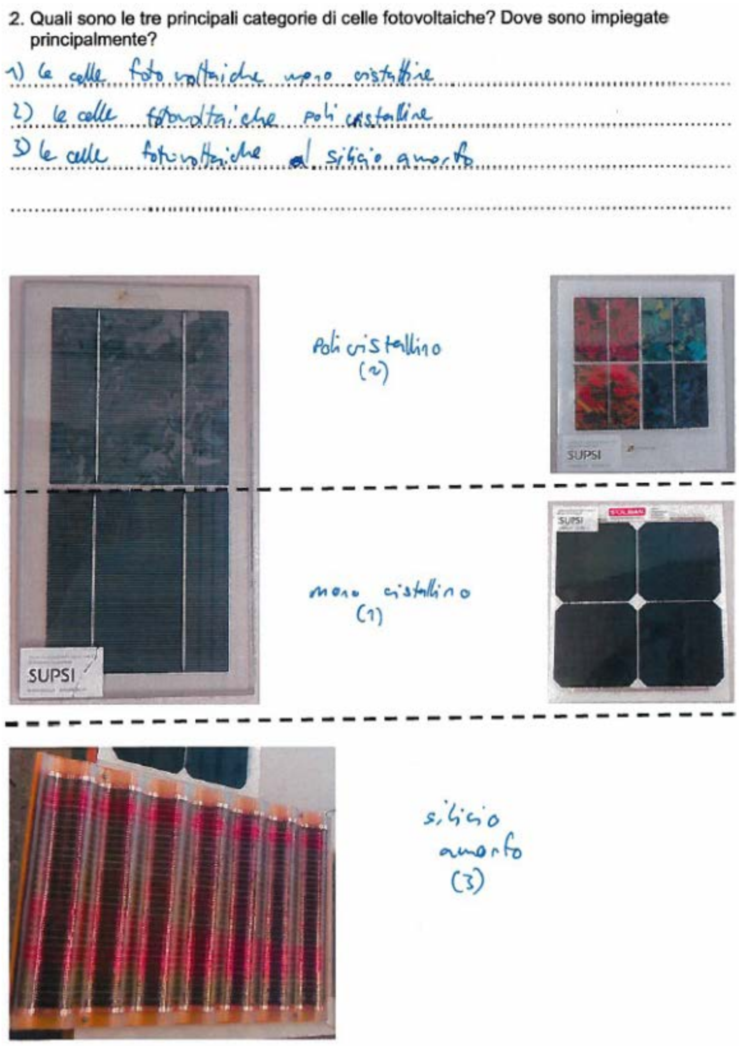
Attività 10

Durante la seconda attività svolta con l'ingegnere, i ragazzi hanno scoperto da che cosa sono composte le celle fotovoltaiche, le loro diverse tipologie e i relativi usi. Inoltre, hanno imparato quali sono i principali componenti di un impianto fotovoltaico e le rispettive funzioni e, attraverso alcune attività pratiche, hanno potuto scoprire quali sono i fattori che influenzano la potenza in uscita da un modulo fotovoltaico (Figura 10).

Figura 10
A sinistra, lingotti di silicio. Al centro, momento di lavoro all'aperto. A destra, diversi tipi di moduli fotovoltaici.

Attività 11

Attraverso la compilazione di apposite schede (Allegato 12), i ragazzi hanno riassunto quanto emerso durante la precedente attività (Figura 11). Si veda un esempio di seguito.



2. Quali sono le tre principali categorie di celle fotovoltaiche? Dove sono impiegate principalmente?

1) le celle foto voltaiche mono cristalline
2) le celle fotovoltaiche poli cristalline
3) le celle fotovoltaiche al silicio amorfo

Poli cristallino (2)

mono cristallino (1)

silicio amorfo (3)

Figura 11
Scheda che illustra diverse tipologie di celle fotovoltaiche.

Attività 12

A questo punto del progetto, gli allievi si sono cimentati con una stima dell'utilizzo annuale dell'energia per l'illuminazione della sede (Figura 12). Per elaborare in modo efficace e rapido i numerosi dati raccolti durante l'attività 3 (tipi diversi di lampade e loro potenza, numero di ore di utilizzo giornaliero, numero di giorni di utilizzo nei periodi autunnale/invernale e primaverile/estivo, anche in relazione agli spazi interni/esterni) e visualizzarli in forma di istogramma, è stato proposto il foglio elettronico di calcolo Excel (Allegato 13 e Allegato 14).

Prima di utilizzare Excel, ai ragazzi è stata somministrata una tabella di autovalutazione sulle competenze legate all'uso di questo software (Allegato 15).

	TIPO DI LAMPADA	DOVE SI TROVA	QUANTE SONO	POTENZA (W)	STIMA DEL NUMERO DI ORE DI UTILIZZO GIORNALIERE		STIMA DEL NUMERO DI GIORNI DI UTILIZZO		UTILIZZO STIMATO (kWh)	
					AUTUNNO - INVERNO	PRIMAVERA - ESTATE	AUTUNNO - INVERNO	PRIMAVERA - ESTATE	AUTUNNO - INVERNO	PRIMAVERA - ESTATE
1	Neon	PT entrata	8	36	12.5	12.5	100	58.5	360	210.6
2	Neon	Davanti direzione	8	36	12.5	12.5	100	58.5	360	210.6
3	Incandescenza	Corridoio	4	60	12.5	12.5	100	58.5	300	175.5
4	Neon	Corridoio cucina	11	58	12.5	12.5	100	58.5	797.5	466.5375
5	Incandescenza (quadrate)	Corridoio scala	5	80	12.5	12.5	100	58.5	500	292.5
6	Led	Sensore Exit	2	8	12.5	12.5	100	58.5	20	11.7
7	Neon	Corridoio 1-2	10	36	12.5	12.5	100	58.5	450	263.25
8	Neon	Corridoio 1-2	10	58	12.5	12.5	100	58.5	725	424.125
9	Led	Luci emergenza	15	8	12.5	12.5	100	58.5	150	87.75
10	Neon	Corridoio SE	44	58	6	6	100	58.5	1531.2	895.752
11	Neon	SE	4	36	6	6	100	58.5	86.4	50.544
12	Neon	Bagni	32	58	12.5	12.5	100	58.5	2320	1357.2
13	Neon	Bagni SE	20	58	6	6	100	58.5	696	407.16
14	Neon	Sgabuzzini GEO	4	58	2	2	100	58.5	46.4	27.144
15	Neon	Sgabuzzino SCI	8	58	2	2	100	58.5	92.8	54.288
16	Neon	Sgabuzzino VIS	2	58	2	2	100	58.5	23.2	13.572
17	Neon	Locale foto	2	58	2	2	100	58.5	23.2	13.572
18	Neon	Auala docenti	20	58	7	7	100	58.5	812	475.02
19	Neon	Aula S. speciale	12	58	6	6	100	58.5	417.6	244.296
20	Neon	13 Aule (1-2)	234	58	7	7	100	58.5	9500.4	5557.734
21	Neon	5 Aule materie speciali	150	58	7	7	100	58.5	6090	3562.65
22	Neon	Aule VIS e AP (PT)	48	58	7	7	100	58.5	1948.8	1140.048
23	Neon	Biblioteca	30	58	4	4	100	58.5	696	407.16
24	Neon	Porta 6 (PT)	5	36	7	7	100	58.5	126	73.71
25	Neon	Aule SE	154	58	6	6	100	58.5	5359.2	3135.132
26	Vapori di Sodio	Palestra	30	400	14	14	123	73.5	20664	12348
27	Incandescenza	Palestra tribuna	10	60	4	4	123	73.5	295.2	176.4
28	Neon	Palestra sicurezza	6	8	10	10	123	73.5	59.04	35.28
29	Neon	Palestra corridoi	4	18	10	10	123	73.5	88.56	52.92
30	Neon	Palestra spogliatoi	42	36	10	10	123	73.5	1859.76	1111.32
31	Neon	Palestra loc. attrezzi	6	58	10	10	123	73.5	428.04	255.78
32	Incandescenza (quadrate)	Palestra scale	5	40	10	10	123	73.5	246	147
33	Neon	Piscina spogliatoi	16	58	14	14	123	73.5	1598.016	954.912
34	Neon	Piscina bagni e atrio	3	58	14	14	123	73.5	299.628	179.046
35	Neon	Piscina	35	58	14	14	123	73.5	3495.66	2088.87
36	Risparmio energetico	Esterno bocce	9	20	15	7.5	182	183	491.4	247.05
37	Led	Esterno sotto portico	22	10	15	7.5	182	183	600.6	301.95
38	Led	Esterno fari a sensore	2	20	15	7.5	182	183	109.2	54.9
39	Risparmio energetico	Esterno fermata Bus	2	15	15	7.5	182	183	81.9	41.175
40	Fari diversi	Aula magna	1	4000	4	4	22	22	352	352
Totali									**64100.7**	**37904.15**
Utilizzo energetico annuale stimato per l'illuminazion			**102005**							
Lettura contatore "Luce" (2016)			**97917**							
Eccedenza nella stima			**4088**							

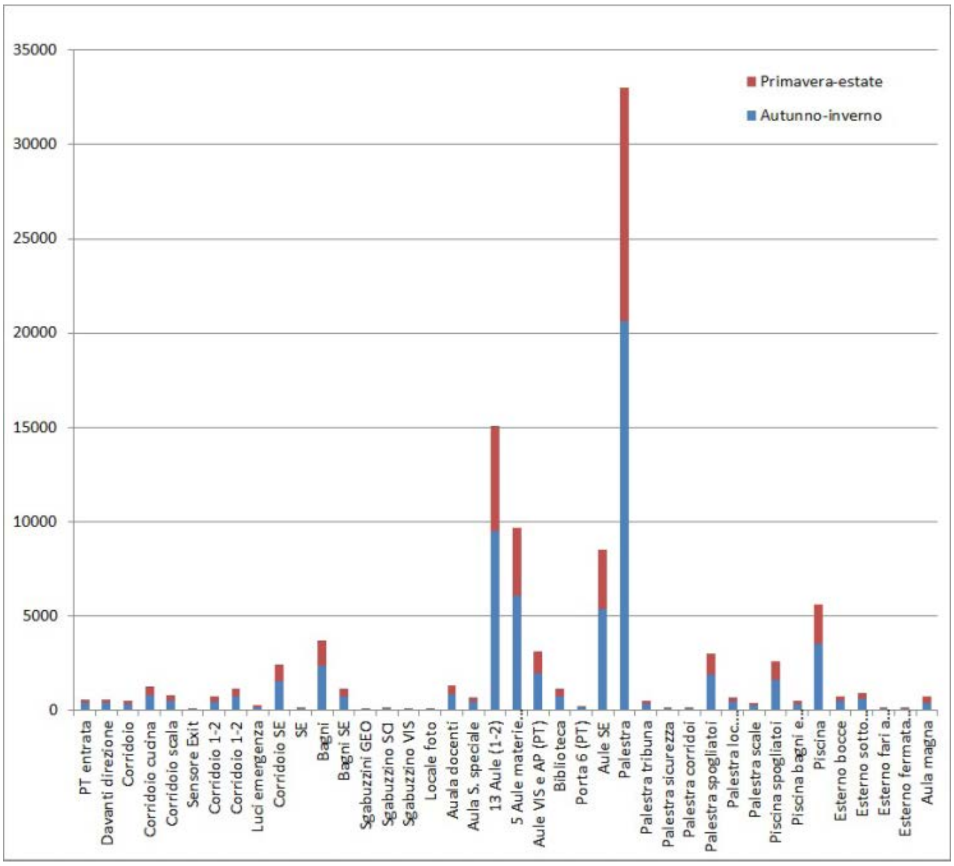


Figura 12
Tabella della pagina precedente e istogramma relativi alla stima dell'utilizzo annuale dell'energia preparati da un allievo in Excel.

Attività 13

Traendo spunto dalle attività pratiche inerenti i pannelli fotovoltaici precedentemente svolte, sono stati introdotti per la prima volta i concetti di funzione (Allegato 16), proporzionalità diretta e inversa (Allegato 17) (Figura 13).

I ragazzi hanno scoperto che collegando insieme più moduli fotovoltaici aumenta la potenza a disposizione. Di fatto, la potenza di un impianto dipende dalla superficie dei pannelli: se raddoppia l'area, raddoppia di conseguenza la potenza. Questa relazione è stata usata per introdurre un primo esempio di funzione lineare e di proporzionalità diretta.

Successivamente, i ragazzi hanno studiato la relazione esistente fra il tempo necessario per ricaricare un determinato accumulatore e la potenza dell'impianto considerato e hanno scoperto che raddoppiando la potenza si dimezza il tempo di ricarica. In questo modo è stata introdotta la proporzionalità inversa.

Esempio: Sapendo che un pannello PV con un'estensione della superficie di 1,8 m^2 ha una potenza nominale di 250 Wp, determina l'estensione della superficie necessaria per avere una potenza di 3'750 Wp.

AREA TOTALE SUPERFICIE PV (m^2)	POTENZA TOTALE (Wp)
1,8	250
x	3'750

1. Sono due **grandezze direttamente proporzionali?** ......Sì.........
2. Se sono due grandezze direttamente proporzionali, posso **impostare la proporzione**:

$$\frac{1{,}8}{250} = \frac{x}{3'750}$$

3. Posso ora **risolvere l'equazione** precedente e determinare il valore di x

$$x = \frac{1{,}8}{250} \cdot 3'750 = \text{......27.........}$$

Esempio: Sapendo che un impianto PV di potenza 10 kW impiega 3 ore per ricaricare completamente un accumulatore, determina la potenza di un impianto che impiega 8 ore per caricare lo stesso accumulatore.

POTENZA TOTALE IMPIANTO PV (kW)	TEMPO TOTALE (h)
10	3
x	8

1. Sono due ***grandezze inversamente proporzionali***? ....Sì..........

2. Se sono due grandezze inversamente proporzionali, posso ***impostare l'equazione***:
$10 \cdot 3 = x \cdot 8$

3. Posso ora ***risolvere l'equazione*** precedente e determinare il valore di x
$x = \frac{10 \cdot 3}{8} = $ ...3,75........

Figura 13
Estratti di schede legate al concetto di proporzionalità.

Attività 14

I dati tratti dall'esito della votazione federale del 21 maggio 2017, inerente la "strategia energetica 2050", nuova politica energetica che promuove le energie rinnovabili e la riduzione della dipendenza dalle energie fossili, hanno fornito l'occasione per testare l'acquisizione della capacità di utilizzare le funzioni base di Excel, quali addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e media di dati, calcolo di percentuali e costruzione di istogrammi (Allegato 18).

Agli allievi è stato chiesto di completare la tabella Excel (Figura 14) sull'esito della votazione federale "Strategia energetica 2050" inserendo nelle caselle evidenziate le formule opportune per calcolare i dati mancanti. Inoltre, è stato chiesto di rappresentare mediante un istogramma l'esito della votazione (percentuale di "Sì" e di "No" per ogni Cantone).

A fine attività, ai ragazzi è stata somministrata nuovamente la tabella di autovalutazione sulle competenze legate all'uso di Excel.

ESITO DELLA VOTAZIONE FEDERALE "STRATEGIA 2050"

CANTONE	SÌ in %	NO in %	SÌ	NO	TOT. VOTI
Zurigo	58.8	41.2	240'983	168'938	409'921
Berna	55.5	44.5	166'071	132'930	299'001
Lucerna	58.5	41.5	72'209	51'319	123'528
Uri	51.7	48.3	5'128	4'787	9'915
Svitto	44.2	55.8	21'452	27'077	48'529
Obvaldo	49.8	50.2	6'364	6'415	12'779
Nidvaldo	50.6	49.4	6'983	6'826	13'809
Glarona	43.7	56.3	4'119	5'300	9'419
Zugo	53.8	46.2	19'139	16'407	35'546
Friburgo	63.2	36.8	48'468	28'258	76'726
Soletta	50.6	49.4	38'976	38'072	77'048
Basilea città	63.4	36.6	34'995	20'160	55'155
Basilea campagna	53.4	46.6	42'251	36'891	79'142
Sciaffusa	51.2	48.8	16'251	15'506	31'757
Appenzello esterno	53.8	46.2	9'323	7'991	17'314
Appenzello interno	56.0	44.0	2'303	1'809	4'112
San Gallo	52.2	47.8	68'346	62'523	130'869
Grigioni	58.7	41.3	30'963	21'748	52'711
Argovia	48.2	51.8	85'056	91'280	176'336
Turgovia	51.4	48.6	33'955	32'116	66'071
Ticino	56.7	43.3	51'831	39'515	91'346
Vaud	73.5	26.5	137'451	49'514	186'965
Vallese	63.4	36.6	57'831	33'414	91'245
Neuchâtel	69.6	30.4	29'884	13'048	42'932
Ginevra	72.5	27.5	79'311	30'013	109'324
Giura	62.7	37.3	12'304	7'312	19'616
TOTALI	58.2	41.8	1'321'947	949'169	2'271'116

Esercizio 1: completa le celle gialle inserendo i calcoli necessari.

Esercizio 2: rappresenta nello stesso istogramma i SÌ in % e i NO in % rispetto ai Cantoni.

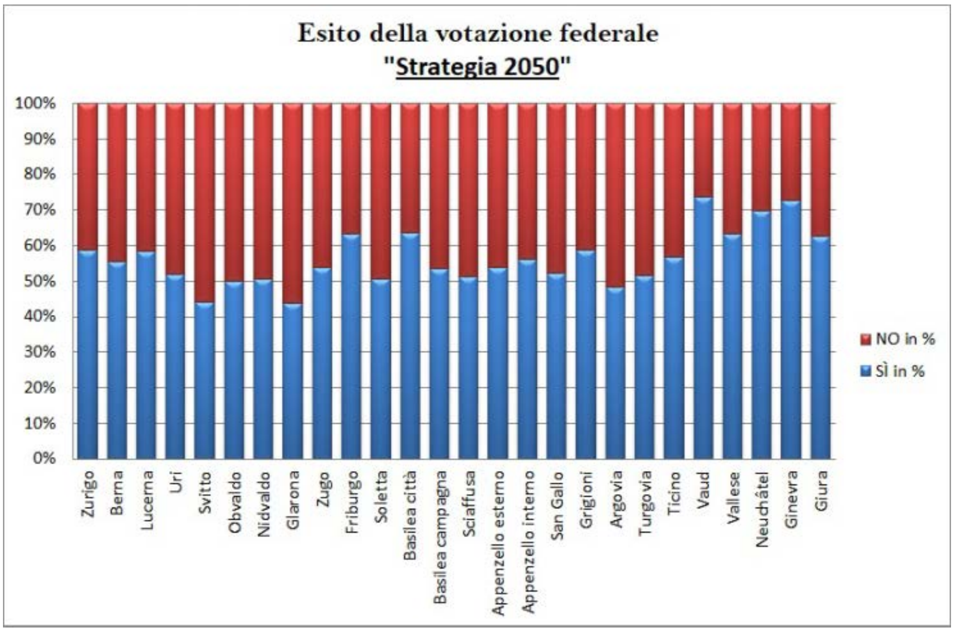


Figura 14
Test sull'uso delle funzioni di base di Excel: "Esito della votazione federale sulla strategia 2050".

Attività 15

Utilizzando tutti i dati raccolti nel corso delle attività sin qui illustrate e gli strumenti forniti, gli allievi hanno elaborato il dimensionamento dell'impianto fotovoltaico (Allegato 19).

Dal diagramma dell'energia relativo alla località geografica della scuola, i ragazzi hanno determinato la coppia ottimale di angoli di Tilt e di Azimut per l'installazione dei pannelli. Considerando la struttura geometrica dei tetti dei diversi blocchi scolastici e le problematiche relative all'ombreggiamento, hanno determinato su quale tetto posare i pannelli.

Successivamente, i ragazzi si sono occupati del dimensionamento dell'impianto. In particolare, considerando un pannello di dimensioni medie, hanno calcolato quanti pannelli posare e quale distanza tenere fra le varie file per evitare problemi di ombreggiamento (Figura 15).

Gli studenti hanno poi calcolato l'energia resa disponibile dall'impianto fotovoltaico agli utilizzatori finali e hanno verificato l'attendibilità dei loro risultati confrontandoli con le valutazioni svolte dall'ingegnere (Allegato 20).

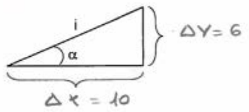
Infine, hanno preso visione delle diverse voci contabili necessarie per allestire un preventivo dei costi da sostenere per la posa e la messa in servizio dell'impianto (Allegato 21).

Per determinare la distanza "d" dobbiamo conoscere "h". Per determinare "h" dobbiamo ricorrere alla relazione esistente fra la tangente di un angolo e la pendenza:

$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = p$

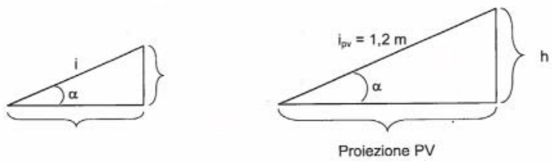
Calcola la pendenza del pannello: $tg\,\alpha \cong 0{,}6\ (p) = \frac{6}{10} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Inserisci nel disegno i valori di Δy e di Δx calcolati e determina la misura dell'ipotenusa del triangolo rettangolo.



$i = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136} \cong 11{,}66$

Sfruttando il rapporto di similitudine, calcola i valori di "h" e della "proiezione PV"



Rapporto di similitudine $= \frac{i_{PV}}{i} = \frac{120}{11{,}66} \cong 10{,}29$

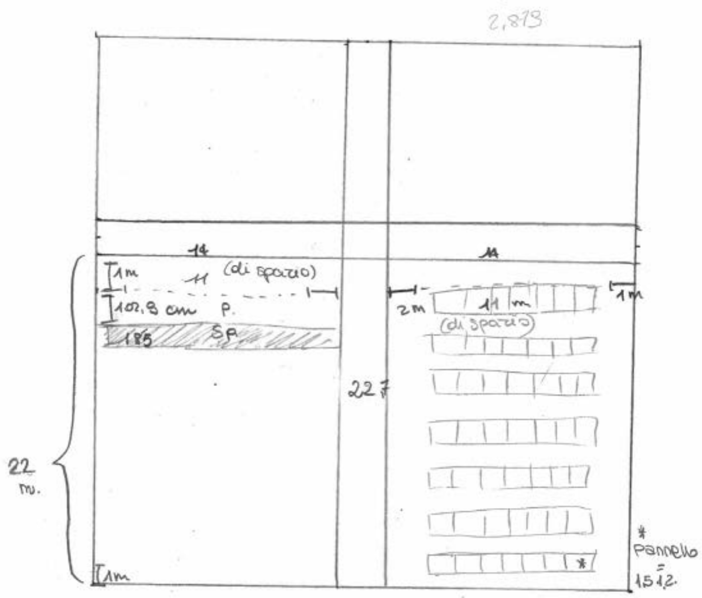
$h = 6 \cdot 10{,}29 = 61{,}74$ [cm]

Proiezione PV $= 10 \cdot 10{,}29 = 102{,}9$ [cm]

Ora puoi determinare la distanza "d" che deve essere mantenuta fra due file di pannelli.

$d = 3 \cdot h = 3 \cdot 61{,}74 = 185$ [cm]

Determina infine quante file di pannelli puoi posare in totale. Aiutati facendo uno schizzo della situazione.
Determina anche quanti pannelli in totale puoi posare.



11 : 1,5 ≅ 7 (pannelli per fila)

7 file di pannelli

$7 \cdot 102{,}9 + 185 \cdot 6 =$
1830,30 [cm] ≅ 18,30 m

Figura 15
Schede che illustrano il dimensionamento finale dell'impianto fotovoltaico.

Attività 16

A questo punto del percorso, dovendo documentare ai membri del Consiglio Comunale, al capo dell'Ufficio tecnico comunale, alla Direzione della scuola, ai relatori esterni e ai genitori quanto elaborato (dossier tecnico cartaceo e podcast), è sorta la necessità di approfondire le problematiche legate alla privacy e al copyright. Prima di questo approfondimento, ai ragazzi è stata somministrata una tabella di autovalutazione sui principi etici e legali legati all'uso delle tecnologie per produrre e condividere contenuti (Allegato 22).

Gli strumenti utilizzati nelle attività introduttive specifiche per i temi privacy e copyright sono stati:

– una presentazione interattiva ppt "Ci facciamo un selfie?" (Allegato 23), appositamente preparata dalla docente responsabile del progetto, e la rispettiva scheda introduttiva (Allegato 24), che hanno costituito un momento di riflessione importante sulle esperienze personali pregresse relativamente all'utilizzo della rete;
– alcune schede di approfondimento inerenti la licenza Creative Commons (Allegato 25).

Partendo dalle esperienze dei ragazzi relative ai comportamenti e all'uso dei dati in rete (dati e immagini personali, di parenti e amici e di estranei, uso di musiche e filmati), gli allievi hanno potuto scoprire che esistono delle leggi e dei regolamenti che tutelano la privacy e i diritti di copyright e alcuni si sono resi conto di essere incorsi durante le proprie pratiche quotidiane in comportamenti a rischio potenziale.
L'attività è stata completata dalla visione del filmato "La ragazza visibile – L'inizio della Storia" (Progetto Generazioni Connesse. La ragazza visibile), proposto dall'insegnante, dal quale si evince che in rete il diritto all'oblio non esiste, e che tutto ciò che vi si pubblica vi resta per sempre.
L'approfondimento sui diritti di copyright è stato introdotto mediante lo studio della licenza d'uso Creative Commons che indica come referenziare il prodotto presente in rete o da pubblicare e il tipo di utilizzo che se ne può fare.

I ragazzi hanno scelto infine il tipo di licenza Creative Commons da attribuire al dossier cartaceo e al podcast in via di preparazione (Figura 16).

Figura 16
Licenza Creative Commons scelta dai ragazzi per il dossier tecnico cartaceo e per il podcast.

I simboli nella Figura 16 significano:

licenza Creative Commons

attribuzione (chi è l'autore)

non commerciale (il prodotto si può usare solo per scopi non commerciali)

non sono ammesse opere derivate (il prodotto può essere usato senza apportare alcuna modifica)

Attività 17

Per la produzione dei materiali per la presentazione finale richiesta (dossier tecnico cartaceo e podcast), gli allievi si sono divisi spontaneamente in piccoli gruppi secondo le propensioni e gli interessi personali.
Per il dossier tecnico (Allegato 26), ogni gruppo si è occupato della stesura di una parte a scelta del documento, compresa la ricerca e la scelta delle fotografie/immagini da inserire.
Per il podcast, alcuni gruppi si sono occupati della stesura del copione radiofonico, altri di leggerlo (nell'Allegato 27 sono raccolte alcune importanti indicazioni per la stesura di un copione radiofonico e per la sua registrazione).
Un altro gruppo ha selezionato le immagini da mostrare nel video e un ragazzo, già particolarmente motivato e preparato nell'uso di software di montaggio audio/video, si è occupato della registrazione della traccia audio, del montaggio del video e della colonna sonora (Figura 17).

Figura 17
Alcuni momenti di lavoro durante la registrazione audio del copione radiofonico.

In parte il lavoro è stato svolto individualmente a casa, e in parte rielaborato in classe. Quanto prodotto da ogni gruppo è stato visionato, condiviso da tutti, così come la versione finale del dossier e del podcast.

A fine lavoro, ai ragazzi è stata somministrata nuovamente la tabella di autovalutazione sui principi etici e legali legati all'uso delle tecnologie per produrre e condividere contenuti.

Attività 18

I prodotti finali sono stati presentati dai ragazzi ai genitori, ai membri del Consiglio Comunale e dell'Ufficio tecnico, a un rappresentante della direzione scolastica, ad alcuni esperti di scuola media e ad alcuni relatori esterni che hanno collaborato alla realizzazione di parti del progetto (**Figura 18**). Ogni allievo, con una semplice frase, ha esposto una parte del progetto, secondo una scaletta precedentemente determinata. Subito dopo la presentazione, è stato proiettato il podcast.
Infine, il dossier tecnico cartaceo è stato consegnato alle autorità comunali presenti e al rappresentante della direzione della scuola.

Figura 18
Due momenti della presentazione finale svolta in aula magna.

La qualità dei testi elaborati dai ragazzi per il dossier tecnico cartaceo e per il podcast è stata valutata dai docenti e dalle diverse figure professionali coinvolte nel progetto, secondo i rispettivi criteri di valutazione specifici.
Anche la presentazione finale svolta dai ragazzi in aula magna è stata valutata dai docenti presenti secondo dei criteri precedentemente stabiliti e condivisi con i ragazzi stessi (**Allegato 28**).

Il podcast (solo audio) è disponibile al seguente link.
Il podcast aumentato (audio e video) è disponibile al seguente link.

5 Risultati e conclusioni

I ragazzi hanno espresso in modo unanime soddisfazione e orgoglio per aver portato a termine in modo "professionale e competente" un lavoro riconosciuto come complesso, evidenziando anche una crescita della sicurezza personale e della fiducia nelle proprie capacità:

> «Alla fine ci rimane il sentimento di gioia e la soddisfazione di essere riusciti a finire un progetto così complesso che di solito viene fatto da dei professionisti».

> «Questo progetto mi è piaciuto molto, anche perché abbiamo fatto un lavoro che di solito fanno degli esperti e quindi è un bel traguardo. È stato bello anche perché è stato un successo di classe».

Sono state inoltre superate alcune paure inziali, sostituite dal piacere del percorso e del risultato: registrare la propria voce, parlare in pubblico, sottoporre il proprio lavoro al giudizio di autorità e di un pubblico esterno:

> «Sapere che delle altre persone vedranno il risultato del nostro faticoso lavoro mi rende nervosa, ma anche orgogliosa e felice. Alla fine di questa attività, mi posso dire più forte, in qualche modo, più sicura».

> «Mi è piaciuto presentare il progetto ai genitori e a chi è venuto».

Dagli scritti dei ragazzi (Allegato 29) sono emersi dati importanti e autentici sul percorso di crescita personale e sull'acquisizione di consapevolezza e senso di responsabilità da parte dei ragazzi.
Il progetto ha toccato molte sfere di interesse, coinvolgendo e appassionando durante il percorso anche chi inizialmente era meno motivato.
Per alcuni allievi sono stati estremamente interessanti gli aspetti tecnico/pratici, come le visite ai locali tecnici, le attività all'aperto, la conoscenza e l'uso di nuovi strumenti, le diverse tipologie di pannelli:

> «Ho visto come sono fatti i locali tecnici e le funzioni delle macchine al loro interno. Ho scoperto tantissimi fatti a proposito dei pannelli fotovoltaici, come per esempio il calore li rovini e ce ne siano vari tipi».

> «Abbiamo usato anche molti strumenti per determinare il rilievo dell'orizzonte, non sapevo ce ne fossero tanti».

Oltre alla sensibilizzazione riguardo le energie rinnovabili, si è aperto anche un orizzonte di nuove professionalità:

> «Questo progetto mi ha aperto gli occhi su molte cose, mestieri e programmi».

> «Abbiamo avuto la possibilità di lavorare con degli strumenti professionali per determinare per esempio l'orizzonte.
> Ci è stato spiegato che ci sono vari tipi di impianti e come funzionano. In pratica abbiamo imparato a svolgere il lavoro di alcuni ingegneri, almeno in parte».

E ha inoltre sorpreso la complessità dei calcoli per il posizionamento dell'impianto e degli aspetti normativi di cui tener conto:

> «Ho imparato delle regole per il posizionamento che non sapevo ci fossero; fosse stato per me, credevo si comprassero e si montassero ed era finito, invece no, devi avere dei permessi ecc».

> «Abbiamo imparato a determinare la superficie che ci serve per posare i pannelli e la posizione ed il luogo in cui si mettono».

È stata espressa soddisfazione pressoché unanime per avere imparato l'uso di Excel, percepito come strumento utile al lavoro sul progetto, ma spendibile anche in altri contesti, scolastici ed extrascolastici:

> «Le attività in Excel sono state molto utili, soprattutto perché io prima non lo sapevo usare più di quel tanto, ora invece abbiamo un nuovo strumento per i calcoli».

> «La cosa che ho trovato più interessante, è stato elaborare le tabelle in Excel, perché era un software nuovo e c'erano tante nuove cose da imparare».

La situazione di partenza registrava in generale una non conoscenza di questo software o, in pochissimi casi, una conoscenza parziale, ma a fine percorso si è registrato un netto miglioramento nell'uso del programma, rilevato sia da una verifica somministrata dall'insegnante sia da una scheda di autovalutazione.
Excel è stato percepito non solo come uno strumento utile a scuola e specificamente per matematica, ma anche per altre discipline, e sono stati ipotizzati usi nella vita reale, come ad esempio: "per programmare il proprio tempo", "per fare un bilancio economico e per calcolare l'utilizzo energetico di casa", "per organizzare il proprio piano di studio", "per le future attività lavorative".
Dalle risposte date dai ragazzi alle domande proposte, è emerso che non hanno solo imparato ad usare tecnicamente alcune funzioni di Excel, ma che hanno anche intuito l'utilità del programma per elaborare tabelle, conti e grafici in modo rapido, cioè hanno capito il valore aggiunto dello strumento tecnologico usato nel modo opportuno in diversi contesti.

Il progetto ha posto gli allievi di fronte ad una situazione problema concreta e legata alla propria scuola, ma ha offerto loro anche l'opportunità di allargare i propri orizzonti e di realizzare un'esperienza che li ha condotti oltre le mura scolastiche ed i programmi di normale routine.
Utilizzando gli strumenti di lavoro forniti dalla scuola (dalle conoscenze disciplinari alle strumentazioni tecniche specifiche), hanno sviluppato e messo in atto competenze non solo disciplinari, ma anche legate alla crescita individuale e personale.
Si tratta di competenze fondamentali di cittadinanza e di sviluppo personale, quali la collaborazione, il lavoro in équipe, la comunicazione (sia a livello interpersonale, sia tramite l'utilizzo degli strumenti multimediali), lo sviluppo del pensiero riflessivo e critico.
La partecipazione e il contributo di relatori esterni, ciascuno specializzato nella propria professione, hanno costituito una risorsa importante per comprendere e svilup-

pare determinate parti del progetto e allo stesso tempo per acquisire consapevolezza della complessità dei problemi legati al progetto stesso e alla realtà territoriale in cui realizzarlo.
L'attività proposta promuove il pensiero riflessivo e critico a partire dalla riflessione su di sé, le proprie competenze e i propri bisogni, articolandosi via via nell'identificazione chiara dei problemi e degli obiettivi da realizzare, nella selezione delle fonti informative, nell'analisi e nella selezione delle informazioni disponibili in base ai bisogni a cui rispondere, nel confronto costante di dati, regole, calcoli, punti di vista, ipotesi di percorso e scelta delle variabili più efficaci.
È illuminante a tal proposito la riflessione scritta da un allievo:

> «Con questo progetto ho imparato a fare uno studio di fattibilità della posa dei pannelli fotovoltaici partendo da zero, per arrivare ad un risultato competente.
> Ho imparato il valore di un copyright e a fare le tabelle in Excel.
> Sono capace di fare dei nessi tra le informazioni più velocemente.
> Ho imparato a scegliere tra informazioni quelle più adatte alla situazione, a capire a cosa potrebbero servire.
> Del progetto in generale mi è piaciuto tutto; il lavoro con i compagni, imparare cose nuove e affascinanti, lavorare con persone competenti, darci la possibilità di fare noi il progetto e portarlo a termine con successo».

Dalle osservazioni in classe e dalle dichiarazioni dei ragazzi, è emerso un ulteriore aspetto interessante.
I ragazzi che normalmente manifestano più facilità nell'apprendimento della matematica hanno espresso soddisfazione per aver affrontato argomenti di matematica (calcoli, funzioni, proporzioni ecc.) attraverso un approccio pratico ritenuto più utile ed interessante rispetto alla sola teoria.

> «Gli argomenti si capiscono meglio su un caso reale che su esercizi sui fogli inventati».

> «Il progetto ci ha permesso di capire meglio la matematica, visto che era un progetto pratico e non come in classe, dove la matematica viene spiegata e svolta in maniera astratta».

> «Nel periodo nel quale abbiamo svolto il progetto, abbiamo imparato molte cose, da quelle tecniche a quelle matematiche. Infatti, questo era anche un progetto di matematica applicata. Personalmente trovo che così è il modo per capire meglio gli argomenti, per esempio le funzioni; così le ho capite molto meglio, rispetto alla semplice teoria».

Dall'altro versante, i ragazzi generalmente più fragili e che richiedono tempi più lunghi per il consolidamento delle competenze matematiche, pur avendo manifestato un apprezzamento generale per la totalità del progetto, non si sono resi ben conto che attraverso situazioni concrete venivano introdotti contenuti e competenze di matematica e hanno dichiarato di avere incontrato difficoltà nelle ultime verifiche in classe, poiché avrebbero avuto bisogno di più tempo e di più "esercizi tradizionali" per approfondire e consolidare le tematiche trattate.
Di fatto, anche questi ragazzi hanno avuto la possibilità di riflettere sulla loro modali-

tà di lavorare, di studiare e di acquisire competenze matematiche. La presa di consapevolezza di come si struttura un progetto complesso è certamente un passo che va verso un possibile cambiamento nel proprio modo di lavorare, di ricercare e mettere in connessione dati, di ragionare e di capire di cosa si ha bisogno per rendere al meglio in un determinato contesto di apprendimento. In base a quanto osservato, è emersa comunque la necessità di prevedere dei momenti di approfondimento disciplinare differenziati e calibrati in base alle necessità degli allievi.

Il progetto ha consentito di riflettere su tematiche di grande attualità in relazione all'uso della rete. Ha favorito una prima presa di consapevolezza su quali possano essere le conseguenze legali e di un uso non ponderato di una condivisione in rete di dati personali o di terze persone (vedi attività individuale con la presentazione interattiva ppt "Ci facciamo un selfie?" descritta in Attività 16).
In sede di discussione plenaria i ragazzi hanno chiesto ulteriori chiarimenti, soprattutto rispetto a comportamenti in rete da loro già attuati o sulle possibili conseguenze di altri potenziali comportamenti.
È emerso come i ragazzi pensino di sapere molto sulla rete, ma come in realtà il loro bagaglio di conoscenze si concentri solo su alcuni aspetti: sapevano poco riguardo agli aspetti che è necessario considerare prima di condividere in rete un qualsiasi prodotto, sia esso un semplice commento o una foto postata in un social network, o un prodotto multimediale con immagini e musiche di terze persone.
La discussione successiva all'attività "Ci facciamo un selfie?" è stata arricchente, poiché chi aveva conoscenze particolari e puntuali dovute ad interessi personali (ad esempio, dove scegliere le musiche con indicazioni di copyright) ha potuto condividerle con i compagni.
Un aspetto che ha stupito i ragazzi è l'impossibilità, di fatto, di eliminare definitivamente dalla rete qualcosa che si è pubblicato (il diritto all'oblio non esiste in Internet). Quando si condivide qualcosa in rete, non si può sapere dove finirà, chi la vedrà e come sarà usata da terze persone.
L'approfondimento sul tipo di licenza Creative Commons ha promosso la presa di consapevolezza di come sia importante tutelare i diritti di copyright, propri e altrui, e di come concretamente si possa procedere per salvaguardare in modo consapevole i propri prodotti multimediali, senza entrare in conflitto con i copyright altrui e senza violare i diritti di privacy.
Sicuramente l'approfondimento di queste tematiche ha costituito un importante momento di crescita e di responsabilità personale, nonché un arricchimento del proprio bagaglio di conoscenze ed esperienze spendibili non solo in ambito scolastico, ma utili soprattutto a propria tutela nel vissuto personale quotidiano e con i social media.

Il progetto ha previsto la preparazione di un dossier da consegnare alle autorità comunali e di un podcast da condividere in rete.
Sapere che il proprio lavoro sarebbe uscito dalle mura scolastiche ha rappresentato una forte spinta motivazionale per i ragazzi e indubbiamente ha promosso analisi più attente ed approfondite e scelte ponderate e responsabili. Ognuno si è applicato con impegno e ha dedicato numerose ore al di fuori dell'orario scolastico per svolgere la parte di attività per la quale si era messo a disposizione (ad esempio, stesura di un punto del dossier o di una parte del copione radiofonico, ricerca e scelta delle foto/immagini da inserire nel dossier o nel podcast, studio autonomo dell'uso dei

software di registrazione e montaggio di tracce audio e dei software di montaggio video ecc.).
La presentazione finale avvenuta in presenza di varie persone esterne al mondo scolastico è stata ricca di emozioni e coinvolgimento.
Era presente anche una classe di quinta elementare arrivata in visita presso la nostra scuola per presentare il suo progetto sull'energia. Gli allievi di scuola elementare hanno esposto i risultati del loro percorso, condividendo con i presenti come sia possibile risparmiare energia nella loro sede scolastica e presso le loro case nella quotidianità mediante piccoli gesti ed accorgimenti. Per gli allievi di scuola elementare, questo scambio (presentare il loro progetto ed assistere alla presentazione dei ragazzi di scuola media) è stato il primo momento di contatto con la nuova sede e con la realtà scolastica nella quale sono stati inseriti l'anno successivo.

La presentazione del lavoro svolto dai ragazzi di scuola media, la successiva visione del podcast e la consegna del dossier cartaceo alle autorità comunali, al capo dell'ufficio tecnico e al rappresentante della direzione scolastica, sono stati tre momenti particolarmente appaganti per i ragazzi, e motivo di orgoglio. Gli allievi hanno espresso la loro soddisfazione per essere stati presi sul serio da tutti i presenti ed hanno acquisito la consapevolezza di avere svolto un lavoro importante e, come tale, riconosciuto dalle autorità comunali presenti.
Durante la fase di presentazione è emerso con chiarezza che, grazie al supporto del podcast, i ragazzi sono riusciti a comunicare in modo efficace non solo il progetto e il lavoro svolto nel corso dell'anno scolastico, ma anche a trasmettere il loro vissuto, le loro conquiste e le emozioni ad esso collegate. Esperienze che ci auguriamo possano rimanere come traccia indelebile della loro crescita personale.

Bibliografia

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., & Bloom, B. S. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Longman.

Assemblea Generale delle Nazioni Unite (10 dicembre 1948). *Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo* (OHCHR). Disponibile in http://www.ohchr.org/EN/UDHR/Pages/Language.aspx?LangID=itn (consultato il 16.02.2017).

Cancelleria dello Stato Area della comunicazione e della documentazione (2010). *Pubblicare e scaricare da Internet - qualche riflessione*. Disponibile in www.ti.ch/ragazzi (consultato il 16.02.2017).

Comune di Brione sopra Minusio – Ufficio tecnico comunale (2013) *NAPR Minusio - Norme di attuazione del Piano Regolatore*. Disponibile in www.minusio.ch (consultato il 2.02.2017).

DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Bellinzona. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch (consultato il 11.02.2017).

Dipartimento federale dell'ambiente, dei trasporti, dell'energia e delle comunicazioni (DATEC). *Strategia energetica 2050: votazione sulla legge sull'energia*. Berna. Disponibile in https://www.uvek.admin.ch/uvek/it/home/energia/strategia-energetica-2050.html (consultato il 23.05.2017).

Ennis, R. (2011). *The Nature of Critical Thinking: An Outline of Critical Thinking Dispositions and Abilities*. Disponibile in http://faculty.education.illinois.edu/rhennis/documents/TheNatureofCriticalThinking_51711_000.pdf (consultato il 20.05.2017).

Facione, P. (2015). *Critical Thinking: What It Is and Why It Counts*. Disponibile in https://www.insightassessment.com/About-Us/Measured-Reasons/pdf-file/Critical-Thinking-What-It-Is-and-Why-It-Counts-PDF (consultato il 23.05.2017).

Herrmann, F. (2006). *Der Karlsruher Physikkurs. Ein Lehrbuch für den Unterricht der Sekundarstufe I.* (Voll 1- 2) (trad.: P. Pianezzi, trad. 2006, Dipartimento dell'educazione, della cultu ra e dello sport. Divisione della scuola / Centro didattico cantonale). Disponibile in http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/kpk/italienisch/kpk_volume1.pdf (consultato il 13.05.2017).

Iacona, A. (2005). *L'argomentazione*. Torino: Einaudi.

Istituto Federale della Proprietà Intellettuale (2011). *Diritto d'autore e diritti di protezione affini*. Berna. Disponibile in www.ipi.ch (consultato il 6.02.2017).

Marini, G. (2015). *Ricomincio da Bloom*. Disponibile in https://insegnantiduepuntozero.wordpress.com/2015/08/31/ricomincio-da-bloom/ (consultato il 23.06.2017).

Mattarella, F. *Cos'è il pensiero critico*. Disponibile in http://www.pensierocritico.eu/cos-e-il-pensiero-critico.html (consultato il 14.05.2017).

Mattarella, F. *Un metodo per leggere criticamente*. Disponibile in http://www.pensierocritico.eu/leggere-criticamente.html (consultato il 21.05.2017).

Osservatorio Ambientale della Svizzera Italiana (OASI). *Mappatura solare*. Disponibile in http://www.oasi.ti.ch (consultato il 2.02.2017)

Ufficio federale dell'energia (UFE). FAQ - *Energia solare*. Disponibile in https://www.svizzeraenergia.ch (consultato il 15.02.2017).

Ufficio federale dell'energia (UFE). *Incentivi e aiuti*. Disponibile in https://www.svizzeraenergia.ch (consultato il 15.02.2017).

1.6.1.1 Legge sulla protezione dei dati personali (LPDP) del 9 marzo 1987. Disponibile in https://www3.ti.ch/CAN/RLeggi/public/index.php/raccolta-leggi/index (consultato il 6.02.2017).

210 Codice civile svizzero (CC) del 10 dicembre1907 (Stato 1° gennaio 2017). Disponibile in www.admin.ch (consultato il 6.02.2017).

231.1 Legge federale sul diritto d'autore e sui diritti di protezione affini (LDA) del 9 ottobre1992 (Stato 1° gennaio 2017). Disponibile in www.admin.ch (consultato il 6.02.2017).

235.1 Legge federale sulla protezione dei dati personali (LPD) del 19 giugno 1992 (Stato 1° gennaio 2014). Disponibile in www.admin.ch (consultato il 6.02.2017).

311.0 Codice penale svizzero (CP) del 21 dicembre 1937 (Stato 1° gennaio 2017). Disponibile in www.admin.ch (consultato il 6.02.2017).

700.1 Ordinanza sulla pianificazione del territorio (OPT) del 28 giugno 2000 (Stato 1° gennaio 2016). Disponibile in www.admin.ch (consultato il 6.02.2017).

Sitografia

Apple Inc. *Per i fan dei podcast*. Disponibile in http://www.apple.com/it/itunes/podcasts/fanfaq.html (consultato il 16.02.2017).

Attivissimo, P. *Blog Il disinformatico*. Disponibile in http://attivissimo.blogspot.ch (consultato il 20.02.2017).

Audacity Team. Disponibile in http://www.audacityteam.org (consultato il 13.02.2017).

Bensound's Royalty Free Music. Disponibile in http://www.bensound.com (consultato il 9.02.2017).

CC Wiki. Disponibile in https://wiki.creativecommons.org/wiki/CC_video_bumpers (consultato il 16.02.2017).

Chocolat 3B Podcast. Disponibile in http://chocolat3b.podomatic.com/ (consultato il 23.02.2017).

Creative Commons Italia. Disponibile in http://www.creativecommons.it/Licenze (consultato il 01.02.2017).

Fondo energie rinnovabili (FER). Disponibile in www4.ti.ch (consultato il 16.02.2017).

Monicamomi. *Il Podcasting!*.flv. Disponibile in https://www.youtube.com/watch?v=JCaqYnpxepE&feature=youtu.be (consultato il 26.02.2017).

Progetto Generazioni Connesse. *La ragazza visibile*. Disponibile in https://www.youtube.com/watch?v=CH4Vz4dDeD8 (consultato il 26.02.2017).

Swissgrid. *Incentivazione delle energie rinnovabili*. Disponibile in https://www.swissgrid.ch (consultato il 9.02.2017).

Deltoidi come aquiloni. Un “volo” attraverso la geometria

Deltoids like kites. A travel through geometry

Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi, Floriana Paternoster, Daniela Rivelli e Daniela Zambon
Mathesis Pesaro, Italia[1]

Sunto / In questo lavoro viene presentato un percorso di geometria piana che ha come protagonista una figura spesso trascurata nelle classi: il deltoide. La metodologia proposta è di tipo attivo e operativo e fa uso sia di artefatti («modelli dinamici») costruiti dagli alunni, sia di software geometrici (Cabri, Geogebra). Si espone il quadro teorico di riferimento e il sapere matematico ricavabile dalle attività suggerite; vengono anche date indicazioni sulla modalità di organizzazione e gestione delle attività in classe e sul loro valore educativo e conoscitivo.

Parole chiave: laboratorio matematico; modelli dinamici; software geometrici; quadrilateri.

Abstract / This work presents a plan geometry learning unit that highlights the deltoid, a figure often neglected in the classrooms. The proposed methodology is active and operative, employing both artifacts («dynamic models») built by the students and geometrical software (Cabri, Geogebra). The theoretical reference framework and the mathematical knowledge that can be gained from the suggested activities are explained and instructions on the organization and the activities management in the classroom are provided together with their educative and cognitive value.

Key words: mathematical laboratory; dynamic models; geometric software; quadrilaterals.

1 Premessa

In questo articolo[2] ci occuperemo di una figura geometrica spesso trascurata: il deltoide o “aquilone”. Proponiamo di analizzarne le proprietà attraverso un percorso di “scoperta operativa” realizzabile in classi di scuola elementare, media e media superiore. In questa ipotesi di lavoro, i concetti prendono progressivamente forma attraverso la manipolazione di materiali (modelli dinamici concreti, software), l’osservazione e la successiva rielaborazione mentale e verbale. Siamo convinte infatti che la matematica non sia la scienza delle formule trasmesse e passivamente apprese, ma un mondo di conoscenza da esplorare liberamente. Gli alunni devono diventare i protagonisti e gli artefici del proprio apprendimento, in un contesto laboratoriale, dove si osserva, si congettura, si “sperimenta” e infine si valida o meno quanto ipotizzato. Anche l’attività matematica può quindi prevedere un approccio sperimentale (Castelnuovo, 1963; 1972).

Una metodologia di costruzione attiva della conoscenza può contribuire a superare due ostacoli: lo scarso interesse di molti allievi nei confronti della matematica

1. Per consultare MathesisPesaro si veda: www.mathesispesaro.altervista.org/attività.
2. Il presente contributo nasce come sintesi e selezione di parti di un testo più ampio, pubblicato sotto forma di e-book (Facenda et al., 2014); ad esso indirizziamo chi fosse interessato ad ulteriori ampliamenti e approfondimenti del tema qui trattato.

e il luogo comune che questa disciplina sia difficile e sia solo per chi “la capisce”. La matematica invece va pensata (e affrontata) come una stimolante attività del pensiero: non è un gioco di formule, né una raccolta di “ricette”, ma una attività che arricchisce le risorse degli alunni. Perché ciò avvenga sono necessari passione e interesse. Ma come interessare e appassionare gli allievi? Una strategia può essere, appunto, coinvolgerli in un processo di manipolazione, osservazione, esplorazione e scoperta. Gli alunni, usando sia la testa che le mani, inseriranno ciò che di nuovo viene costruito nella trama dei concetti già elaborati, al fine di imparare a pensare matematicamente e fare propria una competenza spendibile in contesti diversi.
Il percorso didattico che suggeriamo utilizza dei materiali dinamici: software geometrici e modelli concreti. Questi ultimi sono artefatti semplici, prodotti dagli stessi alunni con cartoncino, puntine di Parigi (in Italia chiamate fermacampioni), filo elastico, legnetti ecc. Gli uni e gli altri permettono di produrre rappresentazioni di oggetti matematici e lavorare su di esse; ricordiamo qui che la matematica opera su oggetti che sono accessibili solo attraverso rappresentazioni (Duval, 1993; D’Amore, 2003). Nei modelli “concreti” la dinamicità si realizza attraverso la presenza di elementi mobili, che consentono di variare il loro aspetto. Nei software dinamici, invece, è disponibile la funzione di “trascinamento” (*dragging*), che ugualmente consente di deformare e quindi modificare in modi diversi le costruzioni geometriche realizzate. La caratteristica principale di ambedue queste tipologie di materiali didattici è quindi il movimento, il dinamismo. Tale aspetto dinamico ha una forte connotazione spazio-temporale, dal momento che c’è un “prima”, un “durante” e un “dopo”; inoltre il movimento suggerisce relazioni di causa-effetto, non osservabili in una presentazione statica della geometria. Per dare forma a queste relazioni si può usare l’implicazione logica “se …, allora …” e passare così da una relazione causale e cronologica a una più formale (Mariotti, 2011). Ancora, l’utilizzo di artefatti favorisce l’uso di altri linguaggi (simbolico, grafico ecc.) nel momento in cui gli alunni devono esprimere osservazioni e congetture suggerite dai materiali (Laborde, 2000; 2007).
Qualsiasi modifica operata sul materiale comporta un feedback, una retroazione. Ad esempio, è possibile che la figura, in conseguenza di un movimento che ne ha cambiato anche di poco la forma, perda una proprietà oppure ne acquisti un’altra che non era stata prevista, così che emergono nuove relazioni tra elementi della figura stessa.
Oltre a ciò che attraverso il movimento cambia, è necessario anche guardare ciò che nonostante il movimento non cambia: gli invarianti che permettono di far emergere il contenuto cognitivo del modello. La contrapposizione e il confronto tra varianti e invarianti è un aspetto qualificante dell’attività di esplorazione degli oggetti geometrici. In un approccio statico alla geometria, gli invarianti sono rilevabili con maggiore difficoltà, ma è proprio la loro osservazione che stimola i processi di generalizzazione che permettono di arrivare a proprietà e teoremi. Un ambiente di geometria dinamica consente infatti di effettuare variazioni mirate, esaltando appunto gli invarianti relazionali, grazie ai quali si costruisce la trama concettuale della conoscenza geometrica.
Il dinamismo anticipa l’evoluzione del pensiero, esalta le relazioni tra elementi delle figure e favorisce un’analisi delle situazioni svincolata dai processi di misura, realizzando situazioni di *problem posing*. Durante l’attività, l’attenzione dell’allievo e quella del docente sono concentrate sul “processo” più che sul “prodotto”, sulla costruzione di immagini mentali più che sulla ricerca di un risultato predefinito. Infatti il lavoro così organizzato non è applicazione di procedure, ma formulazione e/o verifica di congetture/proprietà/teoremi.

Durante il lavoro di osservazione, manipolazione e scoperta, l'alunno è stimolato a essere autonomo; gestisce il proprio materiale, i tempi e i modi dell'osservazione in maniera diretta e personale. La costruzione della conoscenza diventa quindi un processo individualizzato.
A partire dai primi tentativi degli allievi, l'insegnante può seguire lo sviluppo del senso critico e l'arricchimento e l'affinamento dei diversi linguaggi (gestuale, verbale, simbolico, grafico ecc.).
Questa modalità di lavoro conduce in modo naturale al confronto e alla discussione. Gli alunni, essendo chiamati ad argomentare, procedono "spontaneamente" a una revisione critica delle proprie convinzioni ed affermazioni; sono pertanto indotti a riflettere sui propri processi di pensiero nel momento in cui si sforzano di renderli chiari agli altri (Bartolini Bussi & Boni, 1995; Radford, 2006). Nella discussione ogni allievo espone infatti le proprie osservazioni, le proprie congetture e le proprie proposte, che vengono sottoposte al vaglio, ed eventualmente alla critica, sia dei compagni sia dell'insegnante. La discussione sarà coordinata e gestita dal docente (dà la parola, fa da mediatore e moderatore, seleziona il sapere pertinente e significativo, mette a fuoco, problematizza, rilancia la discussione e valida il sapere emerso) con l'obiettivo di costruire ed esprimere nuove conoscenze, in forma condivisa e matematicamente corretta.
In questa modalità di lavoro l'insegnante non può essere un "trasmettitore di informazioni": dovrà orientare, fare da guida, fornire modelli di apprendimento, essere garante della correttezza scientifica di quanto si va elaborando. Agli alunni deve arrivare un'immagine della matematica rigorosa ma aperta, dinamica e quindi amichevole, anche attraverso la "messa in gioco" personale dell'insegnante.
Modelli concreti e software dinamici sono materiali adattabili a situazioni didattiche diverse e consentono una gestione produttiva degli errori. Infatti il clima di ricerca attiva e di forte comunicazione, in cui tutti devono/possono esprimersi, attenua la paura di sbagliare. Anzi, una conclusione imprecisa o sbagliata può diventare un'occasione preziosa per discutere, per cercare esempi e controesempi, per precisare meglio o circoscrivere una intuizione: in ultima analisi, un fattore di crescita per tutti.
Un'ultima annotazione: come usare in modo integrato modelli concreti e software nella didattica della geometria? Sottolineiamo subito che entrambi questi strumenti non sono "lavagne potenziate", cioè strumenti che l'insegnante usa in prima persona – a scopo illustrativo – senza che gli alunni siano coinvolti attivamente. Al contrario, il loro uso va inserito all'interno di una modalità di lavoro fortemente connotata in senso laboratoriale ed euristico (Facenda et al., 2006; 2007; 2008a, b). In secondo luogo, l'insegnante deve avere ben presenti le specificità dei materiali di lavoro, così da renderli complementari e sinergici tra loro. Per quanto riguarda i tempi di utilizzazione, è opportuno proporre i modelli concreti prima dell'approccio al software, che si colloca ad un livello di astrazione più alto (Laborde & Marcheteau, 2008).
Entrambi i tipi di materiale consentono di portare alla luce ciò che in una figura, col movimento, cambia e ciò che resta uguale, fornendo stimoli percettivi e osservazioni preziose, che rendono più agevole la strutturazione di insiemi di figure geometriche. Scoprire le proprietà invarianti, metterle a fuoco e verbalizzarle, sono attività che contribuiscono a definire l'immagine dell'oggetto geometrico nella mente degli studenti, favorendo la progressiva formazione dei concetti. Una situazione in continuo divenire suggerisce inoltre punti di vista diversi che possono condurre a definizioni differenti per uno stesso oggetto geometrico. *Definire* significa presentare gli elementi indispensabili per tracciare l'identikit di una figura, senza dare niente di più di ciò che serve; cercare di formulare più definizioni stimola l'uso di fantasia e libertà.

2 Il modello dinamico «deltoide»: presentazione

Ci riferiamo qui a un oggetto fisico (**Figura 1**) la cui costruzione è molto semplice e richiede l'uso di strumenti e di materiali facilmente reperibili e anche poco costosi.

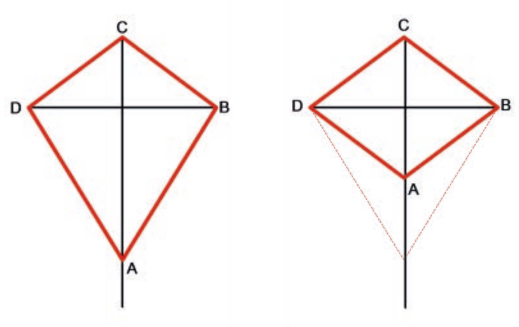


Figura 1
Il modello "in movimento": due posizioni possibili.

Ogni alunno produce il proprio modello partendo da una scheda di istruzioni, esposte sia a parole che attraverso disegni (vedi **Allegato 1**). Deve quindi leggerle con attenzione, decodificare la terminologia e poi "tradurle" in azioni, ordinatamente e con precisione: si tratta già per parecchi allievi di un primo e non banale impegno.
I segmenti che in **Figura 1** sono indicati come BC, CD e BD sono disegnati direttamente sul cartoncino. La traccia AC è invece un'incisione. Quelli che saranno i lati AD e AB sono fatti con del filo elastico, così da permettere il movimento del vertice A lungo il "taglio" AC. (Si veda un filmato del modello in movimento).
Quando il vertice A trasla lungo l'incisione, alcune caratteristiche del modello non si modificano:

– la diagonale AC (o il suo prolungamento, nel caso dei deltoidi concavi) biseca sempre DB, che è la diagonale "fissa";
– le due diagonali, AC e DB, restano sempre perpendicolari tra loro;
– l'angolo $B\widehat{C}D$ non si modifica, essendo formato da due segmenti disegnati.

Lo spostamento del vertice A lungo l'incisione fa sì che il modello generi dei deltoidi.
La prima tappa della costruzione del modello consiste nel disegnare il triangolo isoscele BCD. Se non vengono date indicazioni agli alunni in merito all'ampiezza dell'angolo $B\widehat{C}D$, si osserva che in genere l'opzione "angolo retto" è scelta con minore frequenza e prevale l'angolo acuto. È possibile che ciò sia dovuto al fatto che l'eventuale angolo retto si presenterebbe in posizione "non canonica" e/o che l'immagine di angolo che domina nella mente degli allievi è quella, appunto, dell'angolo acuto.
Se, per rendere più agevole la costruzione del modello, viene incollato sul cartoncino-base un foglio di carta quadrettata, si osserva che la scelta "angolo retto" per $B\widehat{C}D$ diventa più frequente, evidentemente per l'influenza della quadrettatura. Questa, tuttavia, spinge gli alunni a effettuare, spostando il vertice mobile, un movimento non continuo ma a "scatti", in cui ogni scatto coincide con un quadretto del foglio. Ne deriva che l'insieme delle figure che si generano è visto come discreto e finito.
La nostra figura può essere costruita anche con Cabri e GeoGebra (programmi in **Allegato 2**).
Traslando il vertice mobile, quali proprietà hanno i quadrilateri che si formano? Per

un'analisi puntuale, agli alunni verrà fornita una scheda-guida; ne diamo nell'**Allegato 3** due versioni, una più dettagliata e una – per così dire – "sintetica".
L'insegnante può decidere quale delle due proposte si adatta meglio al contesto della propria classe, in base al livello di approfondimento consentito dalle caratteristiche della classe stessa, del curricolo già svolto, delle locuzioni e dei vocaboli già introdotti e padroneggiati dagli allievi.
Molte domande presenti nella versione dettagliata della scheda-guida possono apparire ripetitive e/o ridondanti: si tratta di una nostra, precisa scelta. I ragazzi, nelle loro produzioni scritte, tendono infatti ad essere molto sintetici e la nostra insistenza è un tentativo di ottenere risposte più ampie e articolate. Sulla base delle nostre esperienze, non sempre tale sollecitazione raggiunge il risultato auspicato: i ragazzi si esprimono con difficoltà e tendono a dare per scontate numerose osservazioni. A nostro avviso, tuttavia, è sempre utile e necessario stimolarli a verbalizzazioni più esplicite e argomentate. Sono richiesti anche disegni, che non debbono sostituire la verbalizzazione ma accompagnarla e che ci riveleranno molto sulle immagini concettuali[3] elaborate dai nostri allievi. 3

3 L'organizzazione del lavoro in aula con il supporto di modelli dinamici concreti

Per sfruttare in maniera efficace le potenzialità di questo e di tutti i modelli dinamici concreti è opportuno un lavoro preliminare da parte dell'insegnante. Questi dovrà possedere una conoscenza approfondita della situazione geometrica che propone agli alunni; sarà necessario pertanto che svolga un'analisi a priori dell'artefatto: dovrà muoverlo, osservando varianti ed invarianti, individuando relazioni tra gli elementi delle figure e mettendo a fuoco il sapere matematico che il modello consente di far emergere. Ciò gli permetterà di individuare e selezionare gli obiettivi di lavoro da privilegiare tra quelli possibili. L'insegnante dovrà anche essere sempre pronto a eventuali deviazioni dal percorso prestabilito per cogliere le occasioni di ampliamento che questi strumenti di lavoro, aperti e ricchi di stimoli, forniscono.
Nella fase di preparazione rientra anche la riflessione sulle modalità di organizzazione dell'attività in aula, che possono essere diverse: per piccoli gruppi (omogenei o eterogenei) oppure individuale. In ogni caso ciascun alunno deve operare sul proprio modello e scrivere le osservazioni (personali o di gruppo) sul proprio quaderno. Il docente dovrebbe rimanere il più possibile neutrale: sono gli allievi che devono essere, e sentirsi, protagonisti.
Il tempo di svolgimento necessario è legato al livello di approfondimento richiesto, all'abitudine a lavorare con materiali e, ovviamente, alle caratteristiche della classe. Il modello in esame richiede dalle tre alle quattro ore (costruzione compresa), per avere delle risposte che possano in seguito costituire materiale sufficiente ad una prima discussione.

3. Ricordiamo che gli oggetti di studio della geometria sono costruzioni mentali che fondono «aspetti figurali (forma, posizione, grandezza) con aspetti concettuali (idealità, astrattezza, generalità e perfezione)» (Sbaragli, 2006). Proprietà figurali e concettuali dovrebbero integrarsi nelle immagini mentali degli alunni, originando "immagini concettuali" corrette.

Suggeriremo inoltre nei paragrafi seguenti il ricorso ad altri modelli dinamici, con il ruolo di controesempi o esempi di appoggio, per superare una conclusione sbagliata o una misconcezione, per rafforzare un'affermazione o validare una scoperta. Un controesempio ben scelto può diventare essenziale per superare una difficoltà o come supporto al ragionamento. È bene quindi che l'insegnante abbia, in classe, altri modelli dinamici da utilizzare al momento opportuno.

4 Sapere matematico (ma non solo)

4.1 Quali tipi di figure si formano e quante di ogni tipo

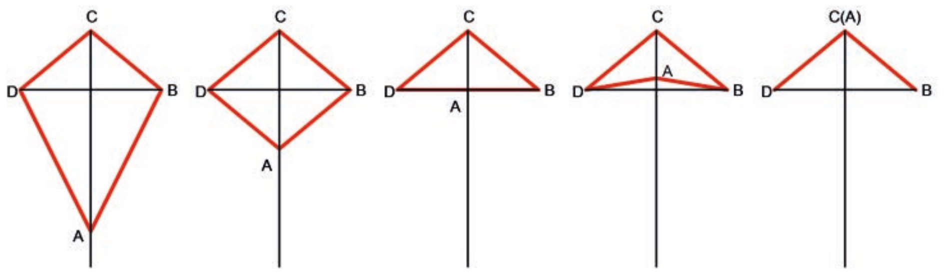


Figura 2
Alcune figure ottenibili nel movimento.

Se trasliamo il vertice A lungo la scanalatura (**Figura 2**), si formano infiniti deltoidi convessi e infiniti deltoidi concavi. A un certo punto, però, ecco apparire un "intruso": un quadrilatero con un angolo di 180°, che chiameremo "caso limite". Gli alunni quasi certamente diranno che si tratta di un triangolo; in effetti, avendo i lati DA e BA adiacenti, esso prende la forma di un triangolo isoscele (BCD).
Una prima interessante osservazione: questa figura-limite ha il ruolo di elemento di separazione tra due insiemi di deltoidi: quelli concavi e quelli convessi.
Durante il movimento del vertice A, però, si è presentata anche un'altra posizione che ha qualcosa di particolare: quella in cui i lati sono tutti della stessa lunghezza. Di che figura si tratta? Dipende evidentemente dall'ampiezza scelta per l'angolo $B\widehat{C}D$: se questo è retto si tratterà di un quadrato, in tutti gli altri casi di un rombo generico. Quando, invece, il vertice A arriva a coincidere con il vertice C, i lati si trovano a essere sovrapposti a coppie. La figura diventa allora una spezzata chiusa, che può essere letta come un quadrilatero degenere.
"Scoprire" un rombo tra i deltoidi rivela l'inclusione dell'insieme dei rombi in quello dei deltoidi. Ma se i rombi sono deltoidi, cosa li distingue in particolare? L'osservazione ci dice che i rombi sono sì dei deltoidi, ma hanno "qualcosa in più": lati della stessa lunghezza (e di conseguenza angoli opposti della stessa ampiezza).
Se poi il modello è stato realizzato in modo che nel movimento si formi un quadrato (ampiezza dell'angolo $B\widehat{C}D = 90°$), si potrà concludere che anche il quadrato è un elemento dell'insieme dei deltoidi.
Che relazione c'è tra questi due quadrilateri, rombo e quadrato, che si possono formare? Il nostro modello non può aiutarci, dal momento che, se genera un rombo generico (angolo $B\widehat{C}D$ non retto), non è in grado di generare un quadrato. Si potrebbe certamente ragionare in modo analogo a quanto fatto in precedenza per la relazione

tra rombi e deltoidi; in fondo il quadrato è anch'esso un rombo "con qualcosa in più": gli angoli tutti della stessa ampiezza o, se si preferisce, con le diagonali uguali. Per validare o confutare la congettura possono aiutarci altri modelli.
Il più noto e facile da realizzare è costituito da quattro asticciole della stessa lunghezza incernierate a due a due agli estremi. Dato che è articolabile, esso permette di passare dal quadrato a infiniti rombi e viceversa (**Figura 3**). La lunghezza dei lati, naturalmente, non cambia e rappresenta quindi l'invariante di questo modello.
Questo semplice dispositivo conferma l'intuizione iniziale: all'interno dell'insieme dei rombi ci sono i quadrati. Ci piace per questo chiamarlo "modello di appoggio", perché sostiene e valida la nostra congettura.

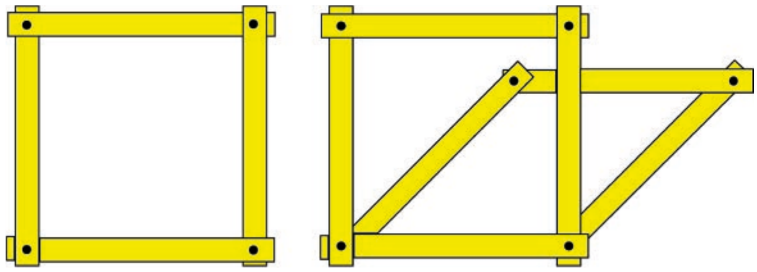


Figura 3
Il modello "rombo articolabile".

Le relazioni che sono state già individuate possono essere rappresentate con un diagramma di Eulero–Venn, come quello seguente (**Figura 4**), che rappresenta sia l'inclusione dei quadrati nei rombi che quella dei rombi nei deltoidi.

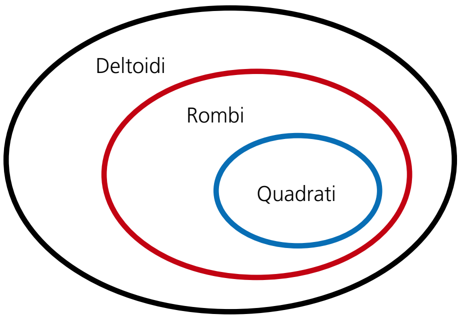


Figura 4
Insieme dei deltoidi.

Riprendiamo ora in considerazione il modello concreto "deltoide". In esso, due caratteristiche non si modificano nel corso del movimento: le diagonali restano perpendicolari e almeno una di esse è bisecata dall'altra (o dal suo prolungamento). Questi invarianti condizionano la tipologia delle figure che si formano; non sarà infatti mai possibile ottenere dei generici parallelogrammi e nemmeno dei generici trapezi, perché quando nel movimento due lati opposti si trovano ad essere paralleli lo sono inevitabilmente anche gli altri due. In più, quando ciò si verifica, i lati sono tutti della stessa lunghezza.
Dal punto di vista didattico è interessante chiedersi quali figure *non* si possono ottenere perché significa approfondire la questione relativa a quali proprietà sono compatibili o non compatibili con la definizione di un certo quadrilatero. Si tratta di una forma di *problem posing*, che può nascere spontaneamente durante la discussione in classe o essere sollecitata dall'insegnante.

4.2 Lati

Quando nel modello "deltoide" il vertice A si muove lungo l'incisione, le lunghezze dei lati CD e CB non si modificano; al contrario, quelle degli altri due cambiano con continuità.
In genere, gli alunni osservano agevolmente che si può ottenere un rombo (lati della stessa lunghezza) o addirittura un quadrato (se l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{C}D$ è di 90°).
La proprietà invariante, relativa ai lati, è che si possono sempre riconoscere due coppie distinte di lati consecutivi che hanno la stessa lunghezza: $\overline{CD} = \overline{CB}$ e $\overline{DA} = \overline{AB}$ (**Figura 5**).

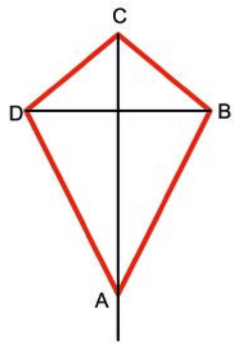


Figura 5
Immagine di un deltoide generico.

Possiamo quindi definire il deltoide come un "quadrilatero con due coppie distinte[4] 4
di lati consecutivi della stessa lunghezza".
Per confermare questa definizione possiamo usare un modello di appoggio che conservi la condizione utilizzata: avere cioè due coppie distinte di lati della stessa lunghezza. Lo si realizza facilmente con quattro asticciole a due a due uguali e incernierate agli estremi come in **Figura 6**:

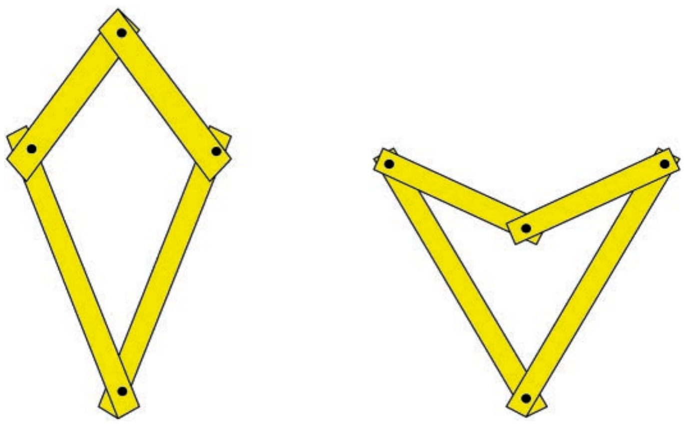


Figura 6
Deltoide articolabile.

Articolando le asticciole si ottengono sempre e solo deltoidi, sia convessi che concavi. Possiamo analizzare, con gli alunni, i due modelli di appoggio fin qui utilizzati per scoprirne analogie e differenze: le figure concave (che non degenerano in una spez-

4. È necessario specificare "coppie distinte" per escludere il caso di un quadrilatero con tre lati uguali; esso avrebbe "due coppie di lati uguali" NON distinte. Infatti i tre lati uguali, che possiamo chiamare a, b, c, darebbero luogo alle coppie: a=b e b=c, che non sono però distinte in quanto hanno in comune b.

zata) si ottengono solo con questo secondo modello, mentre entrambi generano figure isoperimetriche ma non equivalenti. L'area massima si ottiene in entrambi i casi in corrispondenza della posizione in cui si genera un quadrilatero che ha una coppia di angoli opposti retti. La verifica è possibile attraverso la traduzione dei modelli sia per Cabri che per GeoGebra (**Allegato 4**).

4.3 Diagonali

Esaminiamo ora un altro elemento della figura: le diagonali. Nel modello "deltoide dinamico" esse hanno delle proprietà che non dipendono dal movimento del vertice A lungo il taglio:

– la loro posizione reciproca: sono perpendicolari;
– la lunghezza della diagonale DB;
– la bisezione della diagonale DB da parte dell'altra diagonale o del suo prolungamento (che si comporta da asse di simmetria).

La diagonale AC (corrispondente alla scanalatura) ha invece lunghezza variabile: passa da un massimo a un minimo. Il massimo è la misura consentita dai limiti fisici del modello (lunghezza della scanalatura e estensibilità del filo elastico). Il minimo è zero e si raggiunge nel caso degenere "segmenti sovrapposti", cioè quando i vertici A e C coincidono.
Quando si genera un rombo entrambe le diagonali si bisecano. Se poi l'angolo $B\widehat{C}D$ è retto e si forma un quadrato, le diagonali sono anche della stessa lunghezza.
Muovendo A verso il vertice C oltre il "caso limite" del quadrilatero con un angolo di ampiezza 180° (triangolo), i deltoidi che si generano sono concavi. Cosa succede, da qui in poi, alle diagonali? Sarà interessante osservare come gli alunni reagiscono nel constatare che una diagonale è esterna e di conseguenza non interseca più l'altra.
Per condurre un'analisi approfondita può essere utile riprendere l'ultimo modello di appoggio e arricchirlo di un nuovo elemento: le diagonali, costruite con del filo elastico (**Figura 7**). Articolandolo si vedrà come una delle diagonali, dopo essersi sovrapposta ai lati adiacenti nella posizione "caso limite", diventa esterna alla figura. Si potrebbe prendere spunto da questa osservazione per discutere con gli alunni intorno alla definizione di diagonale; spesso, alla domanda "cos'è la diagonale di un poligono", gli alunni rispondono: "è un segmento che taglia la figura in due parti", "che la taglia a metà". Naturalmente, vedere con i propri occhi una diagonale che "sta fuori" dalla figura – e quindi non la "taglia" affatto in due parti – mette in crisi la loro possibile convinzione. (Si veda il video sul deltoide con legnetti in movimento).

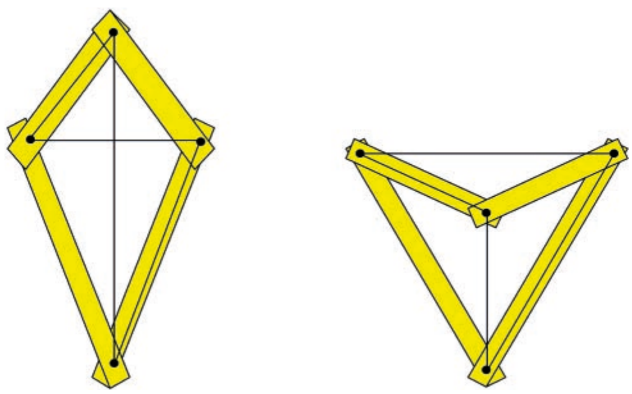


Figura 7
Deltoide articolabile con diagonali.

Possiamo definire il deltoide facendo riferimento alle caratteristiche delle diagonali (perpendicolarità e bisezione di una di esse)? Se diciamo che esso è un "quadrilatero con le diagonali perpendicolari" includiamo oltre ai deltoidi anche trapezi e quadrilateri generici, che *possono* avere questa caratteristica. Anche la frase "quadrilatero con almeno una diagonale che biseca l'altra" non è accettabile perché include – oltre ai deltoidi – tutti i parallelogrammi.
Per formulare una definizione corretta in base ai nostri scopi è perciò necessario considerare entrambe le proprietà: "Il deltoide è un quadrilatero con le diagonali perpendicolari di cui almeno una è bisecata dall'altra o dalla retta che la contiene".
Anche in questo caso possiamo cercare conferma utilizzando un modello d'appoggio. Consiste in due listelli di cartone molto resistente o, meglio ancora, di compensato nei quali è stata praticata una fessura per quasi tutta la loro lunghezza. I due listelli, che possono essere della stessa lunghezza o di lunghezze diverse, vanno uniti con una vite e un bulloncino. I loro estremi (nei quali è stato praticato un foro) vanno poi collegati con un filo elastico.
Data la scanalatura centrale, i due listelli possono "scivolare" uno rispetto all'altro; inoltre, la vite che li collega consente di ruotarli. Si può quindi modificare sia la posizione del punto di intersezione che l'inclinazione reciproca dei listelli, ottenendo così tutti i quadrilateri convessi e, come casi limite, dei triangoli (**Figure 8** e **9**).

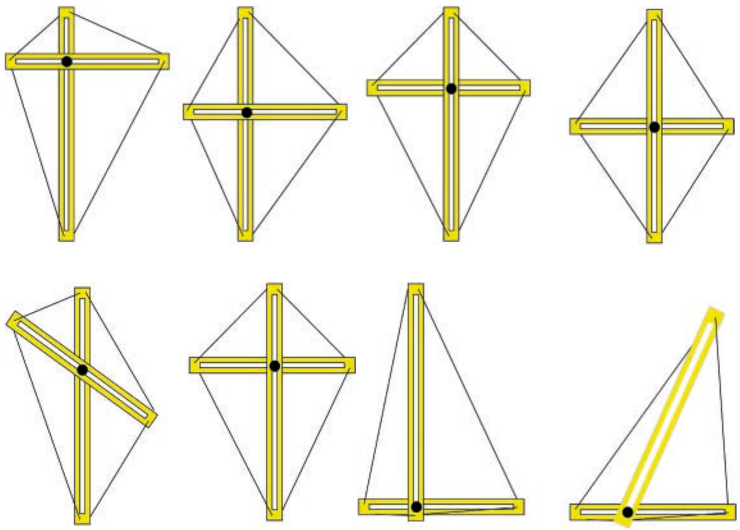


Figura 8
Figure ottenibili con il modello a listelli di lunghezze diverse.

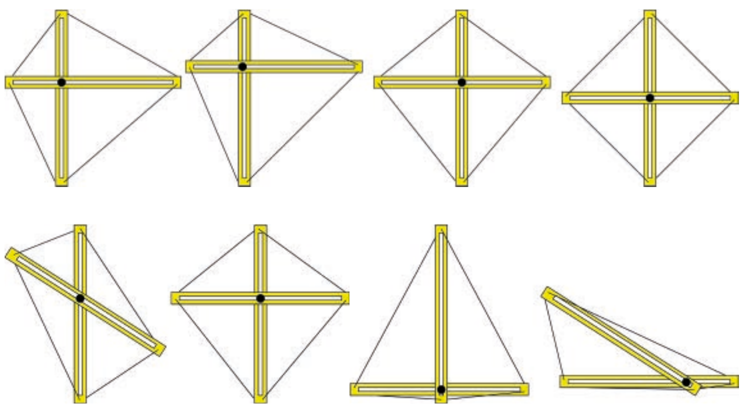


Figura 9
Figure ottenibili con il modello a listelli della stessa lunghezza.

Queste situazioni si possono indagare anche attraverso figure Cabri o GeoGebra (**Allegato 5**).

4.4 Angoli

Anche per gli angoli ci chiediamo se, durante il movimento del modello "deltoide", si modificano le loro ampiezze oppure no e, in caso affermativo, in che modo. L'angolo $B\widehat{C}D$ non cambia la sua ampiezza; tutti gli altri, invece, variano. Man mano che il vertice A trasla verso C, l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}D$ aumenta e quella degli altri due angoli, $A\widehat{D}C$ e $A\widehat{B}C$, diminuisce; gli ultimi due, però, avranno sempre uguale ampiezza.
Quando si forma il rombo sono congruenti le coppie di angoli opposti; se si ottiene un quadrato gli angoli sono tutti retti.
L'angolo $B\widehat{A}D$, man mano che A trasla, passa da infinite posizioni in cui è convesso ad infinite posizioni in cui è concavo. Come abbiamo già rilevato, l'elemento di separazione tra i due insiemi di angoli è l'angolo piatto che si forma quando i lati AB e AD diventano adiacenti, e quindi il modello mostra un "triangolo".
Questa posizione "a triangolo isoscele" (**Figura 10a**) può consentire di giustificare, in maniera diversa, che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è 360°. Infatti i 180° dell'angolo piatto $B\widehat{A}D$ si vanno ad aggiungere ai 180° che sono la somma delle ampiezze degli angoli interni di qualsiasi triangolo. Continuiamo la traslazione del vertice A fino a portarlo a coincidere con C (caso degenere; **Figura 10b**): in questa posizione gli angoli $A\widehat{D}C$ e $A\widehat{B}C$ hanno ampiezza nulla, ma gli altri due sono esplementari (cioè la somma delle loro ampiezze è 360°).

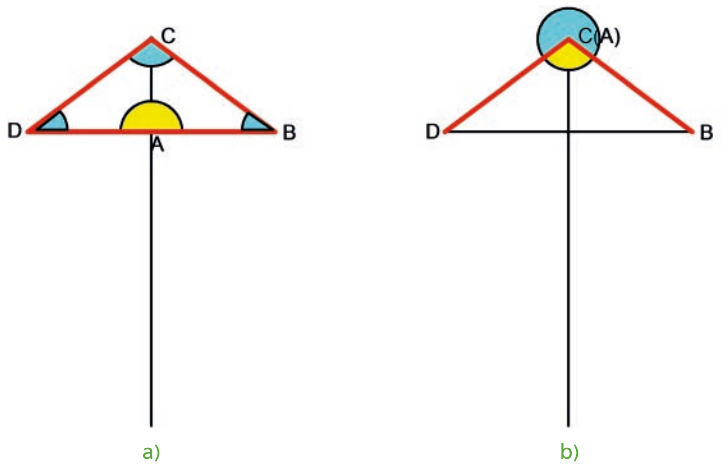


Figura 10
Il caso limite e il "caso degenere": nel primo caso A, B, D sono allineati e nel secondo caso AB e AD si sovrappongono rispettivamente a BC e CD.

In tutti i quadrilateri che si generano, almeno due angoli, opposti, hanno la stessa ampiezza. Si può pensare di utilizzare questa proprietà per costruire una nuova definizione di deltoide? Non è possibile, perché ci sono quadrilateri che la possiedono ma non sono deltoidi, come ad esempio tutti i parallelogrammi generici. Si tratta di una proprietà che è infatti necessaria, ma non sufficiente (questo è un buon esempio da utilizzare in classe per introdurre – o ribadire – il diverso significato di questi due termini).
La conferma che l'invarianza della congruenza di due angoli opposti non è condizione sufficiente per avere un deltoide, la si trova nel modello in **Figura 11**. In questo artefatto (vedi scheda di costruzione in **Allegato 6**) due vertici opposti – estremi di un diametro – sono fissi; gli altri due possono essere mossi, ognuno lungo una semicirconferenza, scorrendo in una scanalatura. (Si veda il video dei quadrilateri inscritti in una circonferenza).

ESPERIENZA DIDATTICA

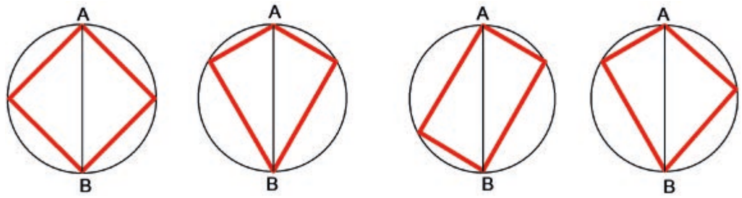


Figura 11
Quadrilateri inscritti in una circonferenza nei quali due vertici opposti – estremi di un diametro – sono fissi.

Modificando a piacere la posizione dei due vertici liberi si ottengono quadrilateri che hanno tutti almeno una coppia di angoli opposti della stessa ampiezza: sono infatti inscritti in una semicirconferenza, quindi entrambi retti. Le diverse posizioni dei vertici mobili permettono di ottenere, oltre a quadrati e deltoidi, anche rettangoli e quadrilateri generici.
La proprietà "possedere almeno due angoli opposti congruenti" non basta quindi per costruire una definizione di deltoide; è necessario aggiungerne un'altra, ad esempio le caratteristiche delle diagonali. In questo modo, si può definire il deltoide come: "quadrilatero con almeno una coppia di angoli opposti della stessa ampiezza e le diagonali perpendicolari".
Questa definizione contiene il quantificatore "almeno", riferito alla coppia di angoli uguali. Esso consente di includere, nella definizione, anche i rombi, che hanno due coppie di angoli opposti della stessa ampiezza. Quanto alle diagonali perpendicolari, anch'esse richiamate nella definizione, la loro presenza esclude sia i parallelogrammi generici che i rettangoli generici; non esclude però i quadrati, che – come si è visto – sono infatti inclusi nell'insieme dei deltoidi. Lo possiamo verificare riprendendo il modello a diagonali scanalate:

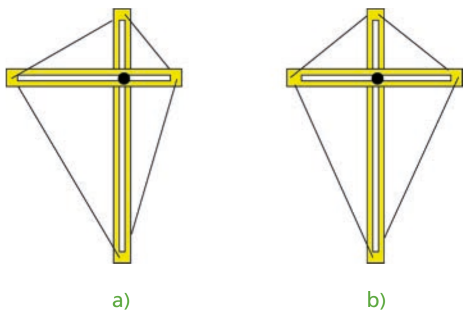


Figura 12
Modello articolabile con diagonali scanalate.

Mantenendo perpendicolari le diagonali, se si modifica il loro punto di intersezione, è possibile verificare operativamente la definizione che abbiamo formulato. Disponiamo dunque il modello in modo che una sola delle due diagonali sia bisecata dall'altra, come appunto è nei deltoidi generici (quindi non rombi; **Figura 12b**). Si osserverà che il quadrilatero acquista immediatamente anche un'altra proprietà: due angoli opposti assumono la stessa ampiezza. Di conseguenza, diventano della stessa lunghezza anche le due coppie (distinte) di lati consecutivi. (Si veda il video del modello a diagonali scanalate perpendicolari).

4.5 Assi di simmetria

Esaminiamo ora, nel modello "deltoide" che è al centro della nostra esposizione, l'elemento assi di simmetria. Traslando il vertice A lungo la scanalatura, si formano tutte figure che hanno un asse di simmetria: questo coincide con la diagonale varia-

bile AC. Ne consegue che quest'ultima è anche sempre bisettrice degli angoli $B\widehat{C}D$ e $B\widehat{A}D$. Nella posizione di A in cui si forma un rombo, entrambe le diagonali sono assi di simmetria; se poi il modello, avendo l'angolo $B\widehat{C}D$ retto, consente di ottenere il quadrato, sono assi di simmetria anche le mediane.
È possibile formulare una definizione di deltoide facendo riferimento solo agli assi di simmetria: "quadrilatero con almeno un asse di simmetria che coincide con una diagonale".
Per convincersi che quest'ultima è proprietà sufficiente basta una semplice osservazione: se si prende un triangolo qualsiasi e lo si sottopone ad una simmetria assiale con asse una retta che contiene uno qualsiasi dei suoi lati, la figura che si ottiene è sempre un deltoide. La Figura 13 lo mostra.

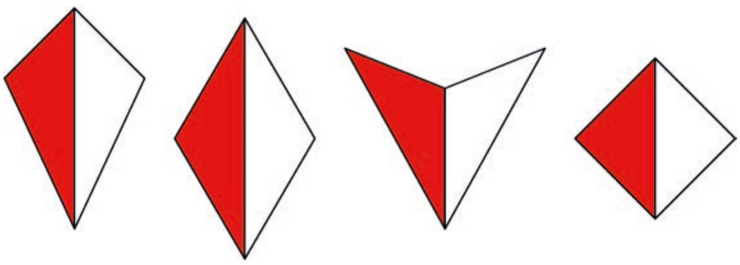


Figura 13
Deltoidi ottenuti simmetrizzando un triangolo.

4.6 Perimetro e area

Analizziamo ora alcuni aspetti metrici, perimetro e area, delle figure generate dal modello concreto "deltoide". Una prima osservazione: il perimetro e l'area delle figure prodotte durante il movimento variano costantemente e quindi si possono ricercare i valori massimi e quelli minimi. Questa indagine, che può sembrare scontata e quindi poco interessante, ci porta invece ad andare oltre i limiti dell'oggetto-modello, lasciando campo libero all'immaginazione; allora le cose cambiano in maniera significativa e il discorso si fa, subito, ben più coinvolgente. Ancora una volta, si potrebbe produrre una situazione di *problem posing* spontaneo, che un'impostazione esclusivamente statica ben difficilmente offre. È utile assecondare queste curiosità, che contribuiscono a spingere gli alunni verso un livello di astrazione maggiore e arricchiscono le loro immagini mentali.

Perimetro

Il perimetro massimo si ottiene nella posizione in cui la distanza tra A e C è la maggiore possibile. Ma non appena si abbandona il modello concreto e ci si affida a un "modello mentale", le cose cambiano: il vertice A può allontanarsi all'infinito da C. Dunque, in questo caso, il perimetro non ha un massimo. Invertendo il movimento, il perimetro inizialmente diminuisce; il minimo si verifica nella posizione in cui il quadrilatero appare come un triangolo isoscele. Infatti, il modello mostra la posizione "segmenti adiacenti" come un quadrilatero degenere. Superato questo punto, ricompaiono i deltoidi, questa volta concavi: e il perimetro riprende ad aumentare.
Ogni deltoide concavo che si genera dal triangolo isoscele in poi, fino alla posizione "segmenti sovrapposti" compresa, ha un "gemello" isoperimetrico convesso, che si è prodotto nel "tragitto" tra rombo e triangolo. Si osservi la Figura 14: i lati DA e BA assumono successivamente posizioni simmetriche rispetto alla diagonale AC; DA" è

simmetrico a DA' e BA" è simmetrico a BA', entrambe le coppie rispetto alla diagonale BD. Poiché DC e BC non variano mai, i quadrilateri A"BCD e A"BCD rimangono sempre isoperimetrici.

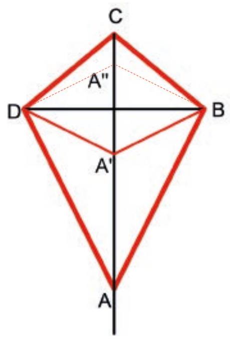


Figura 14
Esempio di coppia di deltoidi isoperimetrici.

Area

Quando il vertice A è alla maggiore distanza possibile (nel modello) rispetto a C si ha l'area massima. Si può, anche in questo caso, proseguire con l'aiuto dell'immaginazione: se A si potesse allontanare all'infinito da C anche l'area non avrebbe massimo. La percezione invece ci aiuta a individuare il minimo con chiarezza: si tratta del quadrilatero degenere, cioè la posizione a segmenti sovrapposti. Qui l'area è, evidentemente, zero. Man mano che l'area va verso il suo minimo anche una delle due diagonali (quella variabile) fa lo stesso; infatti, mentre il vertice A trasla verso C, la diagonale in questione diminuisce fino ad annullarsi: quando la sua misura è zero, si azzera anche l'area.
Le variazioni dell'area e del perimetro che sono state fin qui esaminate separatamente non hanno il medesimo andamento: i massimi e i minimi non sempre coincidono; posizioni di isoperimetria non comportano anche l'equiestensione. Si pensi, ad esempio, al caso dei deltoidi isoperimetrici "gemelli", di cui si è detto parlando di perimetri (Figura 14). I due deltoidi A"BCD e A'BCD – che hanno lo stesso perimetro – non hanno certamente la stessa area.
Vale la pena di soffermarsi su riflessioni di questo tipo per lavorare sulla distinzione tra le variazioni di area e le variazioni di perimetro. Si potrebbe pensare che tale distinzione sia acquisita da tutti gli alunni già durante la scuola elementare; tuttavia, l'esperienza ci insegna che la sovrapposizione dei due concetti è, al contrario, un diffuso misconcetto (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Sbaragli, 2005). A nostro avviso, un'impostazione didattica basata su situazioni geometriche statiche ne favorisce l'instaurarsi e il consolidarsi. Al contrario, lavorare su modelli dinamici (sia concreti che virtuali) può mettere in crisi questo errato schema mentale, rendendolo evidente all'insegnante e all'alunno stesso; la pratica costante di esperienze percettive in cui le variazioni di area e perimetro non sono collegate può evitare che il misconcetto insorga o metta radici nella mente degli alunni.

4.7 Formule per il calcolo di perimetro e area

L'interesse nei confronti di area e perimetro e delle loro variazioni può mantenersi ad un livello puramente qualitativo come abbiamo visto nel paragrafo precedente, oppure si può decidere di allargare e approfondire l'analisi; in questo caso diventa possibile e opportuno il ricorso ai metodi dell'algebra. Anche questo approccio prescinde dai risultati numerici, ma consente all'alunno di mantenere il contatto con il significato di "ciò che fa" mentre opera con i simboli. Questo può aiutare a superare lo scollamento tra "semantica" (significato dei simboli e delle operazioni che si compiono) e "sintassi" (correttezza formale di quanto si sta eseguendo). Vedremo come le attività operative sui modelli possono inserirsi utilmente in questo delicato processo dialettico tra semantica e sintassi.

Durante l'analisi si possono sollecitare gli alunni a calcolare il perimetro delle figure, individuando il procedimento che ritengono più adatto; tale ricerca può far emergere un'analogia tra i deltoidi e i rettangoli, perché entrambi hanno i lati a due a due della stessa lunghezza. Pertanto, gli alunni osserveranno che le stesse formule saranno applicabili per entrambi i quadrilateri.[5]

La formula dell'area del deltoide non è invece immediatamente intuibile; infatti, anche se dalla costruzione del modello ci si rende conto che tutte le figure ottenibili hanno le diagonali perpendicolari, non è affatto evidente che tutti i deltoidi convessi si possano inscrivere in altrettanti rettangoli. Gli alunni saranno facilitati nella scoperta se conoscono una delle formule per calcolare l'area del rombo, in particolare quella collegata al rettangolo di area doppia. È quindi possibile che a qualcuno venga in mente di estendere l'applicazione della formula a tutti i deltoidi, e magari a qualsiasi quadrilatero con le diagonali (d_1 e d_2) perpendicolari (**Figura 15**).

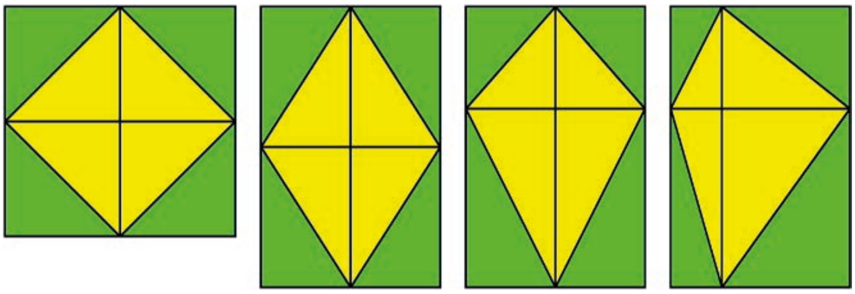


Figura 15
Quadrilateri a diagonali perpendicolari inscritti in rettangoli.

Se si ottiene come caso particolare un quadrato, quando l'angolo "fisso" ($B\widehat{C}D$) è retto, la formula individuata $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, è applicabile anche ad esso.

Questa formula è valida anche per i deltoidi concavi? La risposta è sì, ma la verifica non si può realizzare inscrivendo il deltoide in un rettangolo. È necessario cambiare strategia. Abbiamo già visto che qualsiasi deltoide, sia concavo che convesso, può essere visto come il risultato della simmetrizzazione di un triangolo rispetto ad uno dei suoi lati (**Figura 13**). L'area del deltoide può essere pensata come la somma delle aree dei due triangoli simmetrici. Osserviamo ora i due triangoli in questione: essi hanno un lato che corrisponde alla diagonale variabile del modello "deltoide" (ed è anche asse di simmetria della figura). L'altezza relativa a questo lato corrisponde invece a metà della diagonale fissa, come si può verificare nella **Figura 16**.

5. Inoltre, il confronto tra le due scritture possibili: $P = 2 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2$ e $P = 2 \cdot (l_1 + l_2)$ rappresenta una occasione di riflessione sulla proprietà distributiva. [Come di consueto nella pratica didattica, indichiamo – sia nel rettangolo che nel deltoide – con l_1 e l_2 due lati di lunghezza diversa].

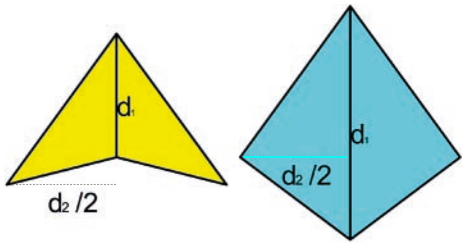


Figura 16
Il deltoide come "somma" di due triangoli simmetrici.

Con semplici passaggi algebrici si arriva di nuovo alla formula: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, infatti, raddoppiando l'area del triangolo – che è metà deltoide – si ottiene l'area del deltoide.

5 La discussione

Abbiamo visto che un punto essenziale dell'attività laboratoriale è la discussione, durante la quale ogni allievo (o gruppo di allievi) espone le proprie osservazioni, congetture e proposte. Vediamo ora brevemente come si potrebbe sviluppare una discussione di bilancio sul lavoro svolto con artefatti.
Gli alunni, prima di socializzare i risultati, analizzano il modello seguendo la traccia di una scheda guida e scrivono le proprie osservazioni sulle questioni poste. La discussione ha inizio dalla lettura di alcune risposte, in modo che chi ascolta possa fare riferimento a opinioni o punti di vista differenti. Durante la lettura l'insegnante non dà giudizi ma coordina, chiede chiarimenti, stimola, ricapitola e appunta alla lavagna gli elementi significativi che vanno emergendo. È bene che in questa fase gli alunni possano manipolare il modello, per meglio seguire gli interventi; eventuali disegni, riprodotti alla lavagna, saranno anch'essi materiale per il dibattito.
Durante la discussione il docente, oltre ad incoraggiare la partecipazione di tutti e a svolgere il ruolo di garante scientifico, avrà cura di non stigmatizzare gli eventuali errori: una volta individuati, questi andranno "volti in positivo" così da diventare fattore di crescita. Il sapere matematico, corretto e condiviso, elaborato nel corso dell'attività e frutto del lavoro di tutti, sarà trascritto da ciascun alunno sul suo quaderno, come documentazione del percorso costruito insieme.
Durante la stesura di questo "testo collettivo", vengono messi a fuoco i punti chiave dell'indagine svolta e le connessioni con altre aree del sapere matematico, aprendo così la strada a ulteriori esplorazioni. Sarà in questo momento che possono essere particolarmente utili altri modelli per sostenere affermazioni e congetture (esempi di appoggio) o per confutarle (contro esempi), opportunamente scelti.
Altro aspetto da non trascurare: quando si espongono le proprie idee bisogna essere chiari e precisi, per farsi capire senza rischio di fraintendimenti. È quindi essenziale la cura del linguaggio per comunicare con chiarezza il proprio percorso mentale, per argomentare, per fare controproposte. Si sviluppa così anche un atteggiamento critico che vale sia nei confronti di quanto esposto dagli altri che delle proprie affermazioni: gli alunni "si ascoltano" (Vygotskij, 1989) e sono portati di conseguenza a riflettere sui propri meccanismi di pensiero e di apprendimento (metacognizione).
Nella fase di discussione, l'insegnante lavora contemporaneamente su più fronti: oltre ai contenuti disciplinari, vanno tenute sotto controllo anche le dinamiche relazionali e i processi di apprendimento dei singoli e della classe. Compito certamente impegnativo, ma i risultati dell'attività possono ampiamente giustificare lo sforzo.

6 Conclusioni

Gli aspetti che abbiamo fin qui indagato non esauriscono tutte le possibilità di analisi offerte dal modello "deltoide". Avrebbero potuto essere affrontati altri argomenti: mediane, centro di simmetria, inscrivibilità e circoscrivibilità delle figure generate, trasformazioni geometriche presenti nel modello, altre relazioni tra elementi della figura (ad es. tra area e diagonale variabile, tra perimetro e lati variabili, tra angoli ecc.), realizzazione di un modello in cui la scanalatura superi il vertice C ecc.; per una trattazione completa rimandiamo all'e-book (Facenda et al., 2014). Quanto esposto in questa sintesi consente comunque di cogliere l'aspetto laboratoriale che è la caratteristica fondamentale della nostra proposta di lavoro. Tuttavia, il fatto che questa impostazione didattica preveda l'uso di artefatti non deve far trascurare un aspetto importante: il modello non è l'"oggetto" matematico, ma solo una sua rappresentazione concreta. Questa consapevolezza, lo ribadiamo, è importante sia per il docente che per gli alunni. Per acquisirla si possono utilizzare opportunamente i condizionamenti imposti dai limiti fisici del modello: le sue dimensioni, l'estensibilità dell'elastico, la lunghezza dell'incisione. Questi aspetti, nell'ottica di un percorso verso l'astrazione, rappresentano una ricchezza. Spingono infatti gli alunni a superare le barriere inevitabili della realtà concreta utilizzando il pensiero, che non ha ostacoli alla sua capacità immaginativa, se non quelli che noi stessi ci poniamo. Per liberarsi dai limiti dell'oggetto concreto gli allievi sono indotti a muoversi nel mondo delle immagini mentali, compiendo i primi passi verso l'astrazione.
Un'ulteriore importante considerazione: le osservazioni e le conclusioni ricavate dall'analisi del modello non sono dimostrazioni; sono "materiali grezzi" con i quali e sui quali è possibile produrre congetture significative. Chiediamoci ora cosa fa l'alunno durante tutta l'attività. Legge, interpreta istruzioni e consegne, realizza modelli concreti, li manipola, descrive oralmente o per iscritto ciò che ha osservato, lo disegna, dà forma verbale alle proprie congetture. Nel fare questo gestisce una continua alternanza o coesistenza di più registri di rappresentazione: simbolico, verbale (scritto e orale), iconico, concreto che concorrono tutti ad accompagnare l'alunno verso l'astrazione. Nello stesso tempo, ogni registro mette in luce i suoi limiti e le sue potenzialità; in alcuni casi, un registro simbolico potrà rivelarsi più funzionale allo scopo rispetto agli altri.
Un ultimo commento a proposito dell'uso di materiali: è raccomandabile presentare uno stesso concetto attraverso l'uso di più modelli, in contemporanea – come si è visto nel caso dei modelli "di appoggio" – o in momenti successivi. Le nuove conoscenze non risultano così legate ad una situazione specifica, ma si propongono come strumenti flessibili, applicabili anche in contesti diversi, generalizzabili.
Siamo consapevoli del fatto che ci sono possibili perplessità e obiezioni di fronte ad una proposta didattica così fortemente connotata in senso operativo e laboratoriale. Primo problema: le classi sono numerose; può quindi essere difficile "tenere la disciplina" in un contesto attivo, che inevitabilmente produce una, almeno apparente, confusione. Tuttavia, l'insegnante attento potrà notare che in genere tutti o quasi tutti gli alunni sono impegnati. Se li osserverà, potrà vedere come si organizzano e ascoltarli mentre discutono, cogliendo frammenti di dialogo che si riveleranno di sorprendente interesse. Non sarà raro verificare che proprio il bambino più impacciato e "debole" di fronte ad un compito matematico "tradizionale", in questo contesto manifesta invece doti insospettate.

Altro punto interrogativo: il tempo. Si può obiettare che per una didattica così impostata e gestita “non c’è abbastanza tempo” a scuola. Vero, ma al termine del percorso è possibile spesso verificare che si è riusciti, sul piano degli apprendimenti, ad andare *oltre* quanto previsto. Questo grazie alla ricchezza di spunti offerti dai materiali, agli scambi e alla socializzazione delle conoscenze. La discussione collettiva fa infatti emergere i concetti che il materiale di lavoro ha consentito di portare alla luce. Si tratta di saperi elaborati in forma condivisa sotto la guida dell’insegnante.
Abbiamo prospettato che la matematica può essere presentata in una veste più amichevole e accattivante rispetto a quella abituale. Per ottenere questo risultato l’alunno deve sentirsi libero di creare, di inventare soluzioni, di fare congetture. Per far sì che l’alunno faccia emergere le proprie intuizioni e sappia confrontarsi con esse, si deve poter lavorare in un contesto di autonomia e libertà.
Il percorso presentato cerca di rispondere a questa richiesta di maggiore libertà senza sacrificare la correttezza scientifica. Le tappe della proposta restano gestibili liberamente, perché ci si può fermare quando si vuole e al punto che si preferisce.
La conoscenza viene così costruita dagli allievi stessi, e non “subita”; l’attività suggerita non è altro che una sollecitazione alla scoperta matematica, al mettersi in gioco e in discussione… diventando una sfida. Come ha commentato un alunno: «Se si muovono le mani si muove anche la mente».

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell’interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*(3), 221–256.

Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della Matematica*. Firenze: Nuova Italia.

Castelnuovo, E. (1972). *Documenti di una esposizione matematica*. Torino: Boringhieri.

D’Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Area e perimetro, aspetti concettuali e didattica*. Trento: Erickson.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., & Paternoster, F. (2006). Utilizzo integrato di modelli dinamici e Cabri nella didattica della geometria. In S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica vent’anni di impegno* (pp. 113-116.). Roma: Carrocci-Faber.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2007). Parallelogrammi inscritti in quadrilateri. Prima parte. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 30A*(5), 549–572.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2008a). Parallelogrammi inscritti in quadrilateri. Seconda parte. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31A*(1), 13–32.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2008b). Uso integrato di Cabri e modelli dinamici: resoconto di una esperienza sui parallelogrammi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31A*(5), 429–444.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2014). *Volare con la matematica: un percorso operativo di geometria dinamica*. Modena: Digital Docet.

Laborde, C. (2000). Dessin et texte dans l'enseignement de la géométrie: leurs interrelations en évolution de l'école élémentaire au débout de l'enseignement secondaire. In B. D'Amore (Ed.), *Didattica della Matematica nel III Millennio* (pp. 73-92). Bologna: Pitagora.

Laborde, C. (2007). Using technology as instrument for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of the dynamic geometry. *La matematica e la sua didattica, 1*, 11–20.

Laborde, C., & Marcheteau, A. (2008). L'incontro tra reale e virtuale in Cabri Elem per attività matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di). *Didattica della matematica e azioni d'aula* (pp. 43-56). Bologna: Pitagora.

Mariotti, M. A. (2011). Congetturare e dimostrare in un ambiente di geometria dinamica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Il Convegno del ventennale* (pp. 21-26). Bologna: Pitagora.

Radford, L. (2006). Comunicazione, apprendimento e formazione dell'io comunitario. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di.), *Il Convegno del ventennale* (pp. 65-72). Bologna: Pitagora.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica, 1*, 57-71.

Vygotskij, L. S. (1989). *Pensiero e linguaggio*. Firenze: Giunti.

Autori / Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi, Floriana Paternoster, Daniela Rivelli, Daniela Zambon
Mathesis Pesaro, Italia
annamaria.fac enda@alice.it, fulgenzi.paola@libero.it, janna.nardi@gmail.com,
florpa@libero.it, daniela.rivelli@email.it, zambondaniela53@gmail.com

Programmare giocando con ScratchJr nella scuola dell'infanzia. La corrispondenza quantità–numero

Playful programming with ScratchJr in Kindergarten. The quantity–number correspondence

Annarosa Serpe
Dipartimento di Matematica e Informatica – Università della Calabria, Italia

Sunto / L'articolo si colloca nel dibattito inerente la pratica del coding e pone l'accento sull'uso di un linguaggio di programmazione visuale, come ScratchJr, nella scuola dell'infanzia. A partire dai riferimenti normativi attuali emanati dal MIUR[1], l'articolo, dopo aver introdotto il quadro di riferimento teorico, presenta le peculiarità e le potenzialità educative dell'App ScratchJr. Al crocevia tra l'esame di alcune riflessioni teoriche e quello di alcune pratiche didattiche, l'articolo mostra una modalità di lavoro in sezione inerente la corrispondenza quantità–numero. La pratica didattica esposta è stata estrapolata da un percorso di ricerca-azione finalizzato al controllo scientifico delle condizioni e delle procedure di utilizzo di ScratchJr nel campo d'esperienza "La conoscenza del mondo".

Parole chiave: coding; scuola dell'infanzia; numero; gioco; quantità; ScratchJr.

Abstract / This article is part of the debate surrounding the practice of coding with special attention on the use of a visual programming language, such as ScratchJr, in Kindergarten. Starting from the current National Guidelines issued by the Italian Ministry for Education and Research (MIUR), the article, after introducing the theoretical framework, presents the peculiarities and educational potential of the ScratchJr App. Situated at the crossroad between the examination of theoretical reflections and of didactic practices, the article shows an approach to the quantity–number correspondence in classroom. The discussed teaching practice has been taken from an action research project aimed to provide validation of the requirements and procedures for introducing ScratchJr in the field of experience concerning "Knowledge of the world".

Keyword: coding; kindergarten; number; play; quantity; ScratchJr.

1 Premessa

Il Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD) emanato dal MIUR (Legge 107 del 15 luglio 2015 - La Buona Scuola) traccia i contorni di una nuova visione della scuola, cioè una scuola digitale basata su competenze, ricca di strumenti di co-creazione di contenuti; una scuola, dunque, che richiede una ridefinizione dei ruoli di chi insegna e di chi apprende.

Il PNSD – pilastro fondamentale della "Buona Scuola" – riserva particolare attenzione alla comprensione della tecnologia e della logica della rete sin dai primi livelli di istruzione. L'obiettivo dell'Azione#17 del PNSD, coerentemente declinato all'interno

1. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca italiano.

del progetto “Programma il Futuro”,[2] è quello di introdurre e sostenere il pensiero 2
computazionale nelle scuole, in particolare nella scuola primaria,[3] garantendo a ciascun 3
alunno la possibilità di avvicinarsi ai principi di base dell’informatica (*coding*) in un contesto di gioco.

Tale introduzione strumentale – denominata “Ora del Codice” – è articolata su due livelli di attività: di base e avanzato.

Nello specifico, nella C.M. del MIUR 08/10/2015 si legge:

> «(...) un’appropriata educazione al “pensiero computazionale”, (...) è infatti essenziale affinché le nuove generazioni siano in grado di affrontare la società del futuro non da consumatori passivi ed ignari di tecnologie e servizi, ma da soggetti consapevoli di tuti gli aspetti in gioco e come attori attivamente partecipi del loro sviluppo».[4] 4
>
> (C.M. del MIUR 08/10/2015)

In questo quadro istituzionale – ancora una volta – la scuola dell’infanzia (SdI) non viene esplicitamente menzionata, anche se è proprio in rapporto alle tecnologie che questo segmento scolastico ha dato il meglio di sé partecipando ad esperienze innovative, a reti di scuole e a progetti specifici finanziati da enti, associazioni e agenzie nazionali e internazionali (Costabile & Serpe, 2010, 2011; Mantovani & Ferri, 2006, 2008; Sbaragli, 2011).

Su questi percorsi polivalenti sono state condotte specifiche ricerche che hanno mostrato il carattere innovativo di queste realtà didattiche non solo per la formazione, ma anche per la costruzione di nuove forme di conoscenza di cui i bambini sono i principali artefici (Calvani, 2007).

A distanza di anni, questa serie di esperienze “tecnologiche” richiede una riconfigurazione e un’estensione che possa consentire di rispondere ai nuovi bisogni degli allievi e al contempo di sviluppare appieno le potenzialità della tecnologia digitale nell’ambito della formazione, integrando le istanze della personalizzazione dei nuovi processi formativi che la tecnologia abilita.

Allo stato attuale, la SdI ritaglia spazi sempre maggiori alla pratica del *coding*, cioè un nuovo tipo di alfabetizzazione che permette il raggiungimento di due obiettivi: apprendere attraverso la programmazione e sviluppare l’abitudine a risolvere problemi più o meno complessi.

In questa prospettiva, assume particolare rilevanza la formazione iniziale dei futuri insegnanti all’impiego delle tecnologie in sé e soprattutto all’utilizzo di nuovi modelli di interazione didattica con questi strumenti.

In tale direzione, il Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell’Università della Calabria ha promosso, all’interno di alcuni insegnamenti, l’uso di linguaggi di programmazione elementari. In particolare, all’interno dell’insegnamento di Didattica della matematica - Modulo 1, nell’ottica suddetta, si vuole fornire agli
studenti[5] l’opportunità di acquisire conoscenze e competenze atte a garantire un 5
utilizzo critico del *coding* nell’insegnamento-apprendimento della matematica.

2. https://programmailfuturo.it/
3. In Canton Ticino questo livello scolastico è detto scuola elementare, in Italia è chiamato scuola primaria.
4. https://www.programmailfuturo.it/media/docs/Circolare-Programma-il-Futuro-2016.pdf
5. L’insegnamento di Didattica della matematica è disposto al III anno del corso di laurea; gli studenti sono stati alfabetizzati dal punto di vista informatico avendo già sostenuto nel I anno il Laboratorio di Tecnologie Didattiche.

In questo scenario è stato effettuato un percorso biennale (AA.AA. 2015-2017) di ricerca-azione (R.-A.) finalizzato alla progettazione, sperimentazione e controllo scientifico di pratiche didattiche sul *coding* mediante adeguati ambienti di programmazione. Questo articolo rende conto di una piccola parte del percorso che mette al centro il *coding* come una delle possibili risorse utilizzabili per favorire e sviluppare il pensiero computazionale fin dalla SdI. A partire dal quadro teorico di riferimento, l'articolo mette in evidenza le potenzialità educative del linguaggio di programmazione visuale ScratchJr. Di seguito, al crocevia tra l'esame di alcune riflessioni teoriche e alcune pratiche educative in sezione, l'articolo pone l'accento su alcuni aspetti utili e praticabili in merito a condizioni e procedure di utilizzo di ScratchJr nel campo d'esperienza "La conoscenza del mondo".

2 Matematica, infanzia e tecnologia

La matematica, o meglio la "prima matematica" nella SdI, si configura non come un sistema di conoscenze disciplinarmente organizzate, ma come un sistema simbolico che sostiene i piccoli allievi nei processi di decodificazione della vita reale, nella soluzione dei problemi, nella revisione ed integrazione delle ipotesi, nell'attribuzione dei significati (Serpe, 2008).
Considerata la natura stessa della matematica, l'accesso agli oggetti matematici non può avvenire che in maniera indiretta, tramite la mediazione di rappresentazioni semiotiche (D'Amore, 2003; Duval, 2000). Per mobilitare questo processo l'insegnante deve promuovere le motivazioni intrinseche della curiosità, della lucidità e del piacere della scoperta, che sono fattori insostituibili per capire e interpretare la realtà (Costabile & Serpe, 2011).
In termini di metodologia, quindi, le proposte didattiche devono collocarsi all'interno di una prospettiva che vede strettamente correlati i fenomeni socio-affettivi e le attività di apprendimento, nonché essere trasversali a tutte le aree disciplinari in modo da sostenere i diversi piani rappresentativi, manipolativo-iconico-simbolico. Di conseguenza, le attività in sezione devono privilegiare il gioco in modo da promuovere e favorire il coinvolgimento della sfera cognitiva, relazionale e affettivo-emotiva del bambino. Il gioco è costituito da diverse tappe: la definizione della consegna, la situazione d'azione, la situazione di formulazione e la situazione di validazione. Quest'ultima è molto importante sia perché sottende l'ottica cooperativa dell'apprendimento, sia perché promuove lo sviluppo dell'attitudine all'argomentazione arrivando a intuire il concetto matematico come punto di arrivo e non di partenza.
Il gioco traduce così il processo dell'apprendere "facendo" in una divertente attività intellettuale e cognitiva. È mediante questi processi di costruzione dell'apprendimento individuale e di gruppo, nelle fasi di "gioco" e "dopo gioco", che emergeranno i valori formativi della personalità.
La struttura compositiva delle Indicazioni Nazionali per campi di esperienza mette al centro dell'apprendimento l'operare del bambino, la sua corporeità, le sue azioni, le sue percezioni; sotteso a ogni campo troviamo uno o più sistemi simbolico-culturali,[6] ma anche le differenze. In ogni campo – connotato dai segni della cultura – il

6

6. Un substrato di conoscenze, linguaggi e abilità.

bambino trova il contesto per diventare via via più consapevole delle sue esperienze, perché le rielabora, le rievoca, le ricostruisce proprio grazie ai mediatori (immagini, parole, strumenti, informazioni), messi a disposizione dal campo. In particolare, il campo d'esperienza "La conoscenza del mondo" è quello dove i bambini pongono le basi per l'elaborazione di concetti scientifici e matematici che verranno proposti nel segmento scolastico successivo.
Tale campo, considerata la sua peculiarità, richiede percorsi metodologici dinamici-costruttivi atti a favorire attività cooperative capaci di mantenere vivi l'interesse e la curiosità dei bambini, nonché a stimolarne l'organizzazione, la progettazione, la ricerca e la scoperta.
L'evoluzione delle pratiche pedagogiche permette di diversificare le situazioni d'apprendimento e al contempo le tradizionali attività in sezione possono essere supportate dalla tecnologia in modo da rendere più efficace l'azione educativa quotidiana mediante strumenti interattivi che traducono l'esperienza in sistemi più efficienti di classificazione.
L'introduzione di strumenti tecnologici deve essere effettuata in maniera progressiva privilegiando la dimensione ludico-esperienziale e avere connotati di continuità con l'esperienza quotidiana (Costabile & Serpe, 2010).
Tale passaggio, parafrasando l'autorevole pensiero di Seymour Papert (1993), non deve essere lineare e "sequenziale", ma deve integrarsi in maniera graduale nelle diverse fasi dello sviluppo. Un'integrazione di natura non lineare tra l'esperienza frutto della dimensione ludica e le attività riflessive e metacognitive, secondo Donald Norman (1993, 2004), dovrebbe integrare *experimental learning* e *reflexive learning*. Pertanto, il substrato e il riferimento teorico non possono che essere trovati sia nella pedagogia post-piagetiana sia nelle teorizzazioni, ispirate da Vygotskij (2010), di quelle che sono state definite la "pedagogia della complessità" di Howard Gardner (1993, 2011) e la "psicologia culturale" di Jerome Bruner (1990, 2009).
Lo strumento tecnologico si deve, quindi, armonizzare con le differenti fasi dello sviluppo psicologico e senso-motorio del bambino e con il rispetto dei tempi e della soggettività; inoltre, si deve sfruttare appieno la strutturale multicodicalità[7] mediante la progettazione di percorsi didattici e *Mind Tools* (Jonassen, 2000) in modo da valorizzare e accrescere e valorizzare in senso critico tutte le possibili abilità e forme d'intelligenza, in primis quella relazionale e comunicativa. In ultimo, ma non meno importante, l'uso della tecnologia deve essere fruibile nei tre aspetti rilevanti della finalizzazione, del carattere situato e della co-progettazione (Ferri & Mantovani, 2006).
Nel campo d'esperienza "La conoscenza del mondo" è previsto che il bambino possa manipolare, giocare con qualsiasi artefatto tecnologico che fa parte della sua esperienza, tutto questo si coniuga molto bene con l'attività matematica. Infatti, nella SdI, l'area della matematica si presenta come ambito privilegiato per lo sviluppo di capacità logiche dunque, come linguaggio utile per la conquista delle capacità di pensare e ragionare in modo scientifico. L'artefatto tecnologico può, dunque, fungere da ponte giocoso per attivare capacità di comunicazione e di elaborazione di significati in modo che il bambino possa, con gradualità, passare dalle azioni alle operazioni, dal concreto all'astratto, attraversando i piani dell'organizzazione spazio-tem-

7

7. Intreccio di codici comunicativi ed espressivi diversi (scritto, sonoro, immagini e video) utilizzati in maniera integrata per realizzare un unico "oggetto comunicativo" (ad esempio le "*emotion*" destinate a rappresentare azioni o stati d'animo o ad abbreviare forme testuali complesse realizzabili sia usando segni di punteggiatura sia in forma grafica).

porale, delle classificazioni, delle relazioni e delle trasformazioni. Ad esempio, l’uso del *tablet* mediante *educational app*, se ben supportato dal lato didattico, può consentire ai bambini di fare esperienze di apprendimento significative e socialmente interattive, in quanto le dimensioni del gioco li abitua – fin da piccoli – a cogliere il senso delle cose (Riva, 2014)[8]. 8

In questa prospettiva, l’insegnante deve appropriarsi dell’attuale tecnologia per potersi orientare in una marea di *app* destinate a più piccoli, familiarizzare con quelle scelte in modo da acquisire consapevolezza in merito a differenti usi, potenzialità e limiti. Un percorso lungo e non facile che richiede un processo formativo, senza il quale si rischia un utilizzo molto circoscritto di *app* incentrato solo sulle classiche abilità di base come il riconoscimento di lettere e numeri, piuttosto che sulla creazione di contenuti o abilità di pensiero di ordine superiore.

A questo proposito, esistono degli ambienti di programmazione visuale, che possono essere usati tramite *app*, che aiutano a sviluppare il pensiero computazionale attraverso ambienti di programmazione adeguati ai bambini più piccoli.

Studi di ricerca hanno dimostrato come i bambini possono trarre beneficio nell’apprendimento attraverso la pratica della programmazione. Consentire di esplorare i concetti alla base dei linguaggi di programmazione nelle prime fasi della vita pone le basi per il successo nell'apprendimento del codice negli anni successivi (Bers, 2007, 2008; Cejka, Rogers, & Portsmore, 2006; Rogers & Portsmore, 2004). Inoltre, i primi studi condotti con LOGO[9] hanno dimostrato che la programmazione al computer, se 9
introdotta in modo strutturato, può aiutare i bambini piccoli a sviluppare differenti abilità cognitive, incluso il senso base del numero (Clements, 1999). Nell’ultimo trentennio gli studi di ricerca si sono concentrati molto sulla rimozione degli ostacoli fisici (manipolatori) e concettuali incontrati dai programmatori principianti tenendo presente, in particolar modo, i bisogni di sviluppo e capacità dei bambini (Rader, Brand, & Lewis, 1997; Ioannidou, Repenning, Lewis, Cherry, & Rader, 2003).

La maggior parte di questi ostacoli sono stati superati e gli attuali *Visual Programming Language* (VPL) consentono di programmare trascinando e collegando le icone sullo schermo; in questo modo anche i più piccoli hanno la possibilità di rendere visibili e “concreti” i loro processi di pensiero astratto. Tutto ciò porta a una maggiore facilità di manipolazione e controllo; inoltre, la visualizzazione sullo schermo aiuta gli insegnanti ad avere informazioni su cosa e come pensa un bambino.

La natura aperta di questi VPL, combinati con la struttura intrinseca della programmazione informatica, promuove in maniera efficace l’immaginazione e la creatività (Resnick, 2007); ciò offre ai bambini l'opportunità di apprendere le competenze essenziali per la programmazione dei computer in tenera età, al contempo consente agli insegnanti l’integrazione della tecnologia in modo significativo.

I programmi di *coding* per bambini hanno raggiunto una notevole popolarità con l'introduzione di *tablet* e altri dispositivi digitali poiché questi ultimi rendono l'interazione con lo strumento più appetibile per le mani piccole, il tutto in un contesto ludico capace di calamitare l’attenzione. Introdotti in sezione, tali programmi promuovono nuove opportunità di apprendimento sia in termini di conoscenze fon-

8. Il significato che ha la tecnologia è diverso da quello del gruppo sociale che la usa.

9. Primo linguaggio di programmazione pensato per scopi eminentemente educativi, orientato all’infanzia. Progettato nel 1967 da W. Feurzeig, Seymour Papert e C. Solomon, vide la prima implementazione della sua caratteristica interfaccia grafica, la tartaruga, nel 1969. Il LOGO trova origine negli studi di Papert con Jean Piaget e nella successiva fondazione, con Marvin Minsky, del laboratorio di intelligenza artificiale del MIT. Il suo fondamento filosofico è costruttivista.

damentali sia in termini di conoscenza specifica. Inoltre incoraggiano interazioni e collaborazioni tra pari nonché occasioni di dialogo con gli adulti; tutto questo favorisce il miglioramento delle capacità di linguaggio, l’arricchimento del vocabolario e la costruzione delle competenze di base (come ordinare, stabilire corrispondenze, classificare ecc.).
Di seguito si presentano le peculiarità e le potenzialità educative di ScratchJr, un VPL basato su Scratch e ridisegnato appositamente per la SdI.

3 Scratch Junior

Scratch è un ambiente di programmazione che usa un *Visual Programming Language* (VPL) che consente di realizzare contenuti digitali interattivi: unisce un linguaggio di programmazione semplice e intuitivo a un sistema di *authoring*[10]. 10
È costituito da quattro elementi (**Figura 1**):

- un linguaggio visuale che permette di costruire programmi, assemblando blocchi come in un gioco di costruzioni;
- un ambiente di programmazione grafico (*Integrated Development Environment* IDE) che consente di creare, modificare ed eseguire programmi scritti nel linguaggio di Scratch;
- un sito web e una piattaforma *cloud*[11] dove creare e salvare i progetti e interagire con altri utenti che utilizzano Scratch; 11
- una community[12] che crea, condivide e scambia idee e progetti. 12

Figura 1
Elementi che compongono il sistema Scratch (Beri & Boscaini, 2016, p. 2).

Ideato e sviluppato dallo Scratch Team presso il *Lifelong Kindergarten Group* dei MIT Media Lab di Boston,[13] Scratch è un software libero[14] il cui ambiente è utilizzabile 13 – 14
sia via web sia tramite installazione sul proprio computer, *tablet* e *smartphone*, in

10. Strumento che consente lo sviluppo rapido di software multimediali grazie alla presenza di elementi grafici e sonori pronti all’uso.
11. https://scratch.mit.edu
12. “A creative learning community”.
13. Massachusetts Institute of Technology (MIT), Cambridge - Massachusetts.
14. Un software a codice aperto (Open source); il codice sorgente ha la licenza GPL (General Public Licence) che ne garantisce la libertà di uso, studio, modifica e ridistribuzione.

quanto le varie versioni sono compatibili con i sistemi operativi Windows, Mac OS X e con le distribuzioni di GNU/Linux.
L'idea di base è di combinare contenuti multimediali, immagini, animazioni, suoni e testi per produrre programmi informatici utilizzabili anche da bambini o persone inesperte di linguaggi di programmazione; in altre parole consente di programmare in maniera semplice e divertente puntando molto sullo spirito di condivisione e collaborazione. Infatti, Scratch è basato sulla metafora del teatro, o del cinema: l'azione si svolge sul palcoscenico (*stage*), dove gli attori, o i personaggi (*sprite*), eseguono quanto è scritto nel loro copione (*script*).
Nello specifico, uno *sprite* può avere più *script*; ogni *script* è composto da una serie di istruzioni impilate l'una sull'altra e ciascuna istruzione è costituita da un blocco colorato. Gli *sprite* hanno un proprio guardaroba, con uno o più costumi, che possono essere indossati in corso d'opera, uno solo per volta. Anche lo *stage*, che è uno sprite un po' particolare, ha *script*, sfondi e suoni.
Con Scratch – proprio come a teatro – c'è chi lavora dietro le quinte ed esegue durante lo spettacolo i compiti che gli sono stati assegnati.[15] 15
Un VPL come Scratch offre nuove strade nei processi di insegnamento e d'apprendimento, le sue peculiarità danno possibilità a ciascun bambino di esprimere e condividere le proprie idee con gli altri in molti modi (Ackermann, 2002).
La programmazione visuale non è altro che un metodo di rappresentazione che permette di esprimere un procedimento come concatenazione di blocchi colorati che ne rappresentano i passi elementari, o le istruzioni che li descrivono.
I bambini in qualità di programmatori "in erba" possono ricoprire molti ruoli: autore, regista e sceneggiatore. Ad esempio, scegliere di fare lo sceneggiatore vuol dire decidere gli sfondi per le scenografie, scrivere i copioni per gli attori e preparare le loro raccolte di costumi e suoni. Tutto questo significa pianificare quello che accade nelle varie situazioni (definire chi c'è sulla scena, in quale posizione del palco si trova ecc.), e in seguito provare le scene per vedere cosa succede effettivamente: se c'è qualcosa che non funziona bisogna effettuare delle modifiche, correzioni.
Di questo VPL esiste anche la versione Junior (ScratchJr)[16], cioè la versione semplificata di Scratch, fruibile dai bambini aventi età compresa tra 4-8 anni. 16
ScratchJr è una *app* per il *coding* gratuita che si può scaricare e installare su *tablet* Android e su iPad.
La logica di ScratchJr è analoga a quella di Scratch, così da permettere anche ai bambini più piccoli di imparare a scrivere delle storie scegliendo fra una serie di personaggi, realizzare giochi e animazioni senza scrivere una sola riga di codice e senza conoscere la programmazione: è sufficiente spostare dei blocchi creando delle sequenze di comportamenti per i singoli personaggi.
ScratchJr è stato ridisegnato e la sua interfaccia (Figura 2) adattata ai più piccoli: risulta molto semplificata nei comandi perché basata sull'iconografia e su note vocali. Il codice viene creato trascinando blocchi in un'area di codifica e agganciandoli insieme. Tutti i blocchi sono completamente *icon-based* (nessun testo): i bambini possono utilizzare questo linguaggio prima di poter leggere. Inoltre, i blocchi sono collegati da sinistra a destra, come le parole.

15. Manovrare le luci, cambiare la scenografia, far partire musiche e suoni di sottofondo.
16. La versione iniziale è stata lanciata nel mese di luglio 2014 per iPad, la versione Android nel 2015; poi nel 2016 è stata lanciata un'applicazione Chromebook.

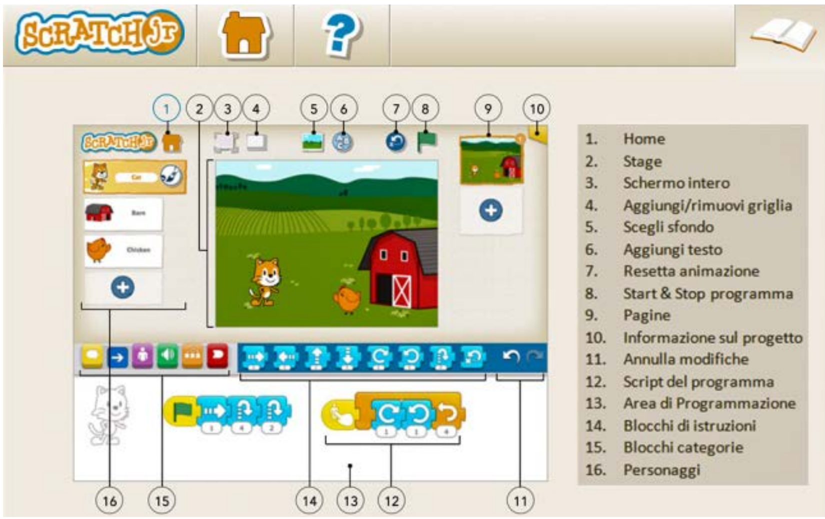


Figura 2
Interfaccia di ScratchJr.

La semplicità dell'interfaccia utente implica una categoria di blocchi di programmazione esigua (**Figura 3**).

CATEGORIA		NOTE
	Attivazione	Avvia *script* e invia messaggi ad altri *script*
	Movimento	Sposta *sprite* e cambia gli angoli
	Aspetto	Controlli di visibilità, i costumi, e la sintesi vocale bolla
	Suono	Riproduce un "*pop*" suono o un suono registrato
	Controllo	Ripete una parte dello scritto un determinato numero di volte
	Fine	Finisce, ripete infinitamente, e va alla pagina specifica del progetto

Figura 3
Categorie blocchi di ScratchJr.

Oltre agli *sprite*, i bambini possono aggiungere sfondi ai progetti, per creare differenti ambienti e atmosfera. Ogni sfondo viene trattato come una pagina in un libro e ha una propria serie di *sprite*.
Un progetto può avere un numero massimo di quattro sfondi.
Attraverso una serie di giochi ed esercizi interattivi basati su un’interfaccia visuale, il bambino può determinare le azioni di uno o più personaggi spostando blocchi o oggetti grafici su un monitor. A ciascun blocco corrisponde un’azione, una linea di codice che non ha bisogno quindi di essere digitato. Basta muovere o assemblare i mattoncini tra di loro nell’ordine necessario a raggiungere un certo obiettivo, e il gioco è fatto.
In definitiva, ScratchJr è molto semplice perché dotato di un set ridotto di istruzioni e, soprattutto caratterizzato da un approccio visuale “clicca e trascina” che rende l’esperienza di programmazione simile ad un gioco di costruzioni ad incastro.
A ogni mattoncino corrisponde un comando, un’istruzione che non ha bisogno di essere digitata ma solo “incastrata” al blocco precedente.
La programmazione visuale è un modo intuitivo e divertente per esprimere un procedimento; introdotta in sezione aiuta a trasformare in modo creativo l’approccio alla conoscenza matematica relativa alle procedure. Fare *coding* con ScratchJr aiuta i più

piccoli a pensare meglio e in modo creativo, stimola la loro curiosità attraverso quello che apparentemente può sembrare solo un gioco; consente di imparare le basi della programmazione informatica, insegna a "dialogare" con il computer, a impartire alla macchina comandi in modo semplice e intuitivo. Il segreto sta tutto nel metodo: poca teoria e tanta pratica.

4 ScratchJr in sezione

Sulla base del quadro teorico menzionato, gli obiettivi pedagogici del percorso di R.– A. sono:

– sperimentazione e controllo scientifico di situazioni didattiche inerenti l'utilizzo di ScratchJr nel campo di esperienza "La conoscenza del mondo";
– favorire la pratica del *coding*, in sezione, come palestra per educare al pensiero computazionale (i bambini mentre giocano esercitano e accrescono le capacità logico-creative-simboliche e le capacità di socializzazione);
– sostenere percorsi d'apprendimento che colleghino l'uso di dispositivi digitali a vissuti esperienziali plurisensoriali.

Lo scaffolding metodologico-didattico, strutturato nel pieno rispetto delle peculiarità biopsichiche, sociali e culturali dei piccoli allievi nonché dei loro stili e ritmi di apprendimento, ha posto le sue fondamenta su una serie di metodi (storytelling, role playing, learning by doing, problem solving) che includono lavoro individuale, lavoro di gruppo e istruzione diretta da parte dell'insegnante, in modo da offrire ai piccoli allievi opportunità di esplorare, conoscere e pianificare per sviluppare le proprie abilità matematiche.
In quest'ottica, è stata privilegiata la metodologia del *Math talk*[17] in quanto aiuta molto il bambino nel processo di acquisizione relativo al senso del numero. Infatti, come affermano D'Amore e Fandiño Pinilla (2015) il *Math talk* è fondamentale perché costituisce un momento di negoziazione di significati e di concetti tra insegnanti e allievi.
Le pratiche didattiche, che afferiscono alle tre aree (quantification, counting and representing number) di dominio del senso del numero (Moomaw, 2011), sono state esperite prima in maniera tradizionale (senza l'impiego della tecnologia) e poi con il *tablet*, utilizzando l'App ScratchJr in base al contesto e all'intenzionalità didattica. Il paradigma educativo-formativo seguito è rappresentato in Figura 4.

17

17. Conversazione matematica che si concretizza nella discussione e nel dialogo con gli allievi. L'insegnante crea un ambiente finalizzato ad incoraggiare una discussione costruttiva dove l'allievo può descrivere i propri metodi ad un'altra persona chiarendo il proprio modo di pensare e la questione per gli altri. È una conversazione incentrata sullo sviluppo della comprensione per tutti i bambini della sezione.

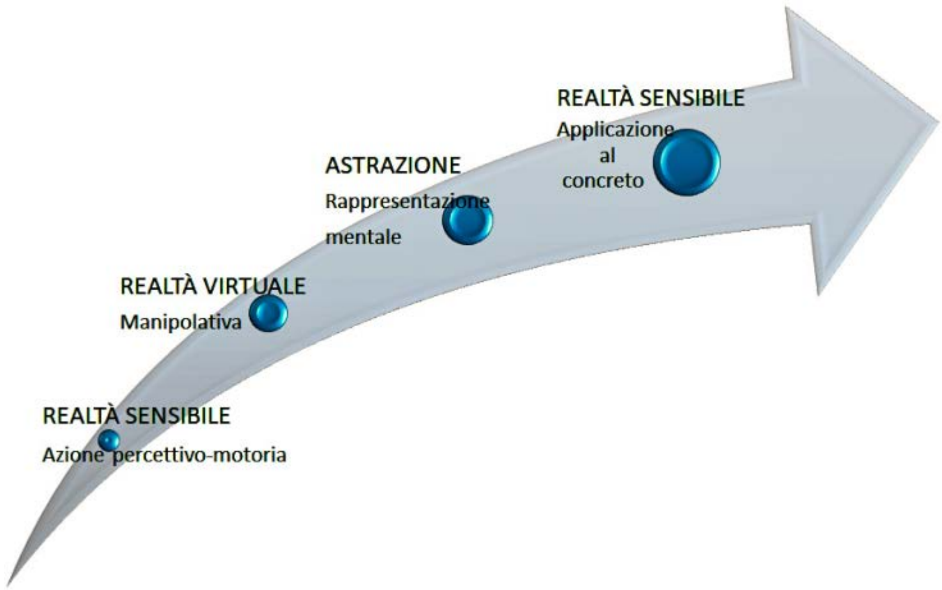


Figura 4
Paradigma metodologico.

A titolo di esempio, si riporta di seguito un estratto del laboratorio, articolato in quattro attività, ciascuna della durata di due ore, finalizzato alla corrispondenza quantità-numero.

4.1 Attività 1 – "Aiutare lo scoiattolo Tom"

L'attività, realizzata con 22 bambini (fascia d'età 5 anni), inizia con il racconto di uno scoiattolo smemorato che ha perso la sua provvista di ghiande e non riesce a trovarla. La storia introduce il gioco finalizzato ad aiutare lo scoiattolo.
L'insegnante favorisce la verbalizzazione per quanto riguarda sia gli aspetti del gioco che quelli aritmetici allo stato embrionale. La struttura del gioco è stata articolata in modo da favorire l'esplorazione spaziale "micro e macro", si avvale pertanto di un percorso a ostacoli che i bambini devono affrontare in coppia con ruoli differenti: un componente della coppia viene bendato e l'altro componente deve aiutarlo, tramite opportune indicazioni, nel percorso ad ostacoli. La coppia deve affrontare il percorso per arrivare al traguardo rappresentato da un cerchio contenente le ghiande perse dallo scoiattolo. Dopodiché, il bambino non bendato deve individuare, su comando verbale del suo compagno, il cartoncino recante il numero corretto e togliere dal cerchio la quantità corrispondente di ghiande e riporle in un apposito cestino. Quattro bambini hanno il compito di monitorare tutti gli steps del gioco in modo da far emergere, in maniera costruttiva, eventuali errori; mentre altri dieci bambini rappresentano le cifre da 0 a 9 tenendo nelle mani – bene in vista – il cartoncino sul quale è scritto il numero. Infine, i rimanenti bambini, sono responsabili del cestino dove vengono riposte le ghiande.
L'insegnante lascia ai bambini libertà nella scelta dei ruoli, successivamente li invita a provare in coppia il percorso ad ostacoli. In definitiva, tutti i bambini ricoprono i diversi ruoli ad eccezione di quello inerente il componente bendato della coppia: durante la sperimentazione alcuni bambini non hanno voluto essere bendati e l'insegnante ha rispettato il loro volere. La tipologia di gioco proposta affina l'orientamento spaziale, il controllo e la coordinazione visuo-motoria, la flessibilità, l'attenzione e la concentrazione; al contempo armonizza, in una relazione di responsabilità reci-

proca, i differenti ruoli ricoperti, in particolar modo per i componenti della coppia: le istruzioni fornite dal bambino che deve guidare il suo compagno bendato fino al traguardo e viceversa il comando verbale dato dal bambino bendato al suo compagno il quale deve individuare il cartoncino che indica il numero (**Figura 5**) e inserire, quindi, la corrispondente quantità di ghiande nel cestino (**Figura 6**).
Di seguito, si riportano due momenti tratti dal diario dell’attività:
Bambina non bendata: «Devi fare un salto, poi lo zig-zag e salire sui mattoncini facendo due passi in avanti».

Figura 5
Una coppia nel percorso ad ostacoli.

Bambina bendata: «Devi prendere tre ghiande e inserirle dentro il cestino».

Figura 6
Il riconoscimento del cartoncino con il numero tre.

Il gioco preceduto dalla narrazione esalta gli aspetti emotivi e apre la strada a quelli aritmetici privilegiando le relazioni spaziali, la discriminazione percettiva, le associazioni, le sequenze logiche e i primi numeri. In particolare, il gioco consente di fare esperienza con il concetto di quantità che riveste un ruolo importante per una corretta educazione in campo aritmetico.

4.2 Attività 2 – “Giochiamo con ScratchJr”

Ai bambini viene chiesto di creare un progetto/programma sulla base dell'esperienza reale vissuta in precedenza; si tratta di rappresentare degli *stages* relativi alla corrispondenza quantità-numero. Di conseguenza, vengono discussi gli elementi di ScratchJr che è necessario mettere in gioco quando si pensa ad un programma come risultato di un processo di organizzazione e strutturazione logica e come strumento di comunicazione.
In quest'attività, i bambini non si trovano più ad agire con tutto il corpo in quanto viene privilegiato il canale percettivo-visivo e l'uso della coordinazione oculo-manuale: devono inventare una serie di istruzioni in sequenza per raggiungere l'obiettivo.
In questo processo di progettazione/programmazione interattiva i bambini sono impegnati in una attività di problem-solving che richiede:

– identificazione degli obiettivi;
– formulazione di un piano;
– sviluppo di un primo tentativo per raggiungere l'obiettivo;
– sviluppo del metodo per valutare il successo;
– testare e valutare;
– revisione e apportare modifiche;
– sviluppo del prossimo tentativo.

In altre parole, i bambini costruiscono, risolvono, ragionano e astraggono sviluppando il pensiero computazionale. Questo compito in forma di gioco richiede la specificazione dei ruoli o l'onere di ricoprire più ruoli all'interno dei gruppi.
I bambini, dunque, diventano dei veri e propri programmatori che analizzano i problemi, pensano le soluzioni e utilizzano il codice per realizzarle.
Tutto ciò implica anche vestire i panni dell'investigatore: scoprire come funziona un programma scritto da altri o trovare l'errore che non fa funzionare il programma.
Per le ragioni suddette, inizialmente l'insegnante presenta alla LIM il programma “I pesci nel mare” (Figura 7) in modo da stimolare la discussione non solo sui concetti base della programmazione, ma anche sull'individuazione dei blocchi di ScratchJr utilizzati e la relativa sequenza dei passi necessari.
L'obiettivo non è solo quello di riprendere i termini (avanti/dietro, destra/sinistra, su/giù, andare avanti di tot. numero di passi ecc.), ma anche di evidenziare l'importanza dell'ordine quando si danno delle istruzioni. D'altro canto, i bambini sono esperti nell'uso di ScratchJr, quindi l'insegnante si avvale di una sorta di *flipped* allo stato embrionale per capire se i bambini riescono ad orientarsi in un progetto già definito.

Figura 7
Editor di progetto
“I pesci nel mare”.

Qui, di seguito, si riporta un breve estratto del protocollo di discussione, corredato da alcuni output:

F.: «Hai preso lo sfondo del mare e poi abbiamo messo i pesci».

M.: «Nooo! Prima devi scegliere i personaggi e poi metti tutti i personaggi che vuoi».

M.: «Abbiamo aumentato i personaggi. Ora devi dire quanti sono i pesci che vedi e li devi associare al numero giusto come abbiamo fatto con il gioco delle ghiande».

P.: «Prima devi aprire l’app sul tablet e poi crei lo stage».

T.: «Maestra dobbiamo andare in ordine! Secondo me Paolo ha detto una cosa giusta e un’altra sbagliata».

Ins.: «Spiegati meglio».

T.: «Dopo che hai aperto l’app nella pagina devi cliccare sul segno “più” perché vuoi iniziare a lavorare. Cliccando sulla “più” fai un nuovo progetto scegliendo il mare» (Figura 8).

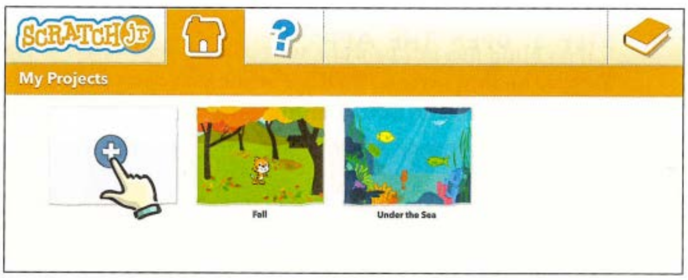


Figura 8
Editor per iniziare
un nuovo progetto.

F. (interrompe T.): «(…) e poi la maestra ha dovuto creare i personaggi che sono i pesci e i numeri. Questo è lo script!».

D.: «Noi questo lo sappiamo fare! La maestra vuole sapere quanti sono i pesci e devi cliccare sul numero (indicando il numero 3 sulla LIM). Dopo puoi vedere più pesci e devi fare la stessa cosa».

M.: «Basta guardare l’ordine dei blocchi».

A.: «Infatti la maestra ha utilizzato il blocco giallo che avvia lo script quando tocchi il personaggio e poi quello che ingrandisce il personaggio» (**Figura 9**).

Figura 9
Il blocco giallo degli eventi e il blocco fucsia degli aspetti.

L’insegnante, successivamente, divide la classe in gruppi eterogenei di 3 o 4 componenti sulla base dei livelli di partenza, stili cognitivi, aspetto emotivo e socio-affettivo, abilità e capacità. Distribuisce, poi, un *tablet* a ogni gruppo in modo che i bambini possano lavorare con ScratchJr. Infatti, ogni gruppo deve realizzare degli stage relativi alla corrispondenza quantità-numero.
I passaggi effettuati sono stati i seguenti:

1. creazione dello stage e scrittura del numero all’interno di un quadrato;
2. scelta degli *sprite* (a piacere) dal comando apposito;
3. associazione degli *sprite* al simbolo numerico;
4. utilizzo dei blocchi di azione e di registrazione;
5. realizzazione di nuovi stage.

In **figura 10** sono riportati alcuni momenti dell’attività.

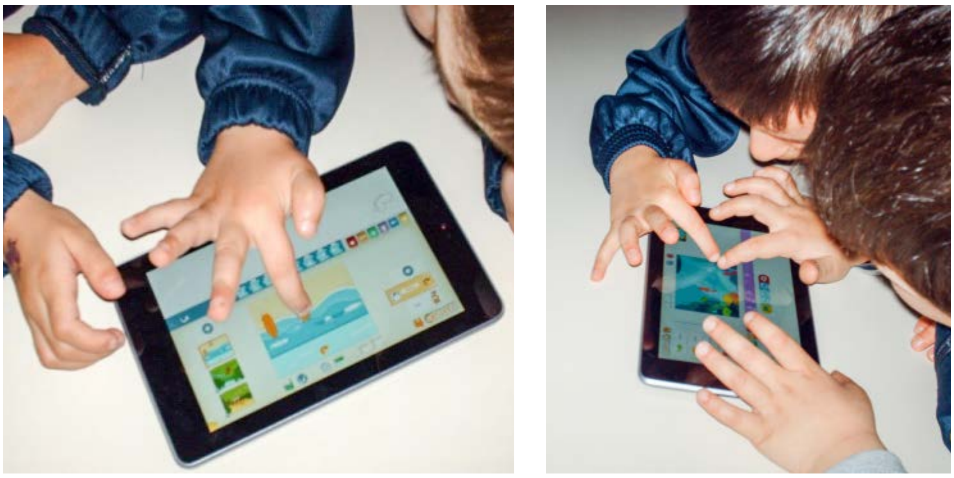


Figura 10
Gruppi di bambini in azione con ScratchJr.

A titolo di esempio, si riportano due programmi realizzati dai bambini (**Figura 11** e **12**).

Figura 11
Le mele.

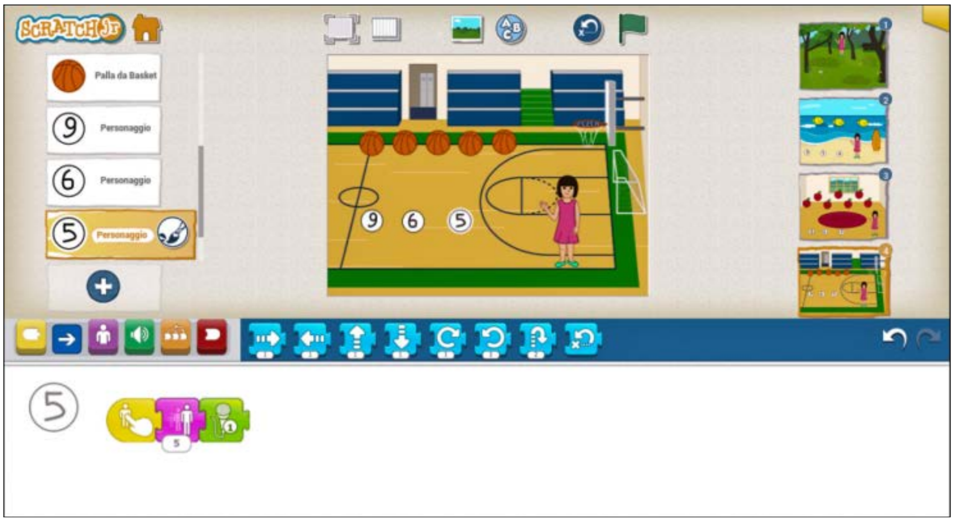


Figura 12
Palle da Basket.

Il laboratorio è stato completato con altre due attività, la prima impegnava singolarmente i bambini nella rappresentazione spontanea “quantità–numero” (Figura 13); nella seconda, invece, i bambini disposti in “circle time” dovevano inventare una storia utilizzando le parole *molti*, *pochi*, *nessuno*, *tanti*, *ogni* e i numeri da 0 a 9 e rappresentarla poi su un cartellone da collocare in sezione.

Figura 13
Rappresentazioni spontanee “quantità-numero”.

Queste due attività supportano e completano le precedenti nell'ottica del paradigma educativo-formativo (**Figura 5**). Infatti, il bambino inizia a razionalizzare le due tipologie di esperienze (reale e virtuale) potenziando così il processo cognitivo inerente ai meccanismi semantici che regolano la comprensione della quantità, i meccanismi lessicali che regolano il nome del numero (ad esempio tre, quattro ecc.) nonché l'irrilevanza dell'ordine che non modifica la cardinalità e l'aspetto sintattico (distinguere una unità dall'insieme di elementi che la costituiscono).

5 Osservazione

Per il monitoraggio delle attività implicate nei processi di innovazione e degli effetti prodotti nell'ambiente educativo, sono state strutturate e gestite dai ricercatori delle schede di protocollo osservativo che consentissero di evidenziare conoscenze, abilità e competenze afferenti sia al campo di esperienza "La conoscenza del mondo", sia ad altri campi menzionati nelle Indicazioni Nazionali italiane (**Allegato 1**).

Questa modalità ha consentito di valorizzare l'uso di ScratchJr in sezione: una *app* non fine a se stessa, ma funzionale all'attivazione dei processi cognitivi vagliati nella fase di progettazione. Qui di seguito si riporta il quadro sinottico (**Tabella 1**) di alcuni risultati espressi in percentuale riferiti agli item più interessanti e prevalenti per questo tipo di attività ottenuti dal campione dei 22 piccoli allievi. I risultati ottenuti dai ricercatori sono stati in seguito condivisi e discussi con gli insegnanti di sezione.

VALUTAZIONE OBIETTIVI FORMATIVI	MAI	A VOLTE	PIÙ DELLE VOLTE	SEMPRE
Confronto quantitativi: tanti-pochi	3%	/	31%	66%
Cogliere l'equipotenza: tanti-quanti	/	/	30%	70%
Confronto quantitativi: uno-tanti-pochi	18%	5%	25%	52%
Corrispondenza quantità-numero (da 1 a 9)	10%	5%	30%	55%
Collocare le azioni nel tempo: prima/dopo	15%	2%	25%	58%
Sperimentare in situazione il concetto di avanti/indietro	7%	/	18%	75%
Muoversi nella spazio con consapevolezza topologica	12%	5%	38%	45%
Coordinazione visivo-motoria	28%	8%	28%	36%
Controllo motricità fine	28%	18%	29%	25%

Tabella 1
Sinottico risultati delle due attività.

Le fasi operative e valutative costituiscono un tentativo pilota di documentare traiettorie di apprendimento relative all'interfaccia di ScratchJr e i primi concetti di programmazione come supporto per la costruzione di conoscenze fondamentali e di conoscenze specifiche nell'ambito logico-matematico.
L'uso delle differenti categorie dei blocchi di programmazione favorisce, nei bam-

bini, lo sviluppo di abilità in merito alla stima ("quanti" o "quanto lontano"), alla previsione (cosa accade quando eseguo il programma interamente) e alla riflessione sui cambiamenti effettuati (i cambiamenti si traducono nel risultato previsto? Sì/no e perché).
Questo processo facilita l'apprendimento esplorativo delle istruzioni e supporta la percezione dei bambini sul ruolo che ogni azione ha in un programma.
Le azioni di programmazione devono avere non solo un output visibile, ma anche un tempo per essere eseguite; tale consapevolezza è maturata nel tempo consentendo la sperimentazione di nuove situazioni e, quindi, la creazione di programmi sempre più strutturati. Infatti, all'inizio l'interfaccia amichevole, gioiosa ed invitante ha indotto molti bambini a riempire gli schermi con molti personaggi mediante un "clic ripetuto" del pulsante *sprite* per poi non costruire alcun comportamento di questi personaggi, ma unicamente divertendosi nell'ingrandirne/diminuirne la dimensione.
A corredo della **Tabella 1**, si riportano alcuni dati valutativi inerenti l'utilizzo di ScratchJr in sezione (**Tabella 2**).

	MAI	A VOLTE	PIÙ DELLE VOLTE	SEMPRE
Dà istruzioni in sequenza per ottenere semplici risultati	/	3%	31%	66%
Trova diverse categorie di blocchi	/	/	20%	80%
Sposta i blocchi nell'area scripting	/	13%	37%	50%
Utilizza i blocchi nell'area scripting come pulsanti	/	/	46%	54%
Seleziona caratteri e impostazioni	5%	15%	21%	59%
Usa e crea sfondi per il progetto	/	/	10%	90%
Modifica o disegna nuovi personaggi e impostazioni	5%	10%	25%	60%
Aggiunge nuove pagine	5%	8%	25%	62%
Gioca/esegue i programmi usando il pulsante della bandiera verde	/	/	20%	80%
Combina i diversi blocchi di movimento in sequenze programmate	5%	10%	35%	50%
Usa i blocchi di ripetizione e "ripetizione per sempre" per ottenere risultati specifici	8%	12%	52%	28%
Utilizza i numeri sui blocchi di movimento per ridurre il numero dei blocchi necessari	5%	10%	32%	53%
Utilizza il blocco finale per indicare la fine di un programma	/	/	20%	80%
Salva il proprio lavoro e apre progetti nuovi ed esistenti	5%	10%	26%	59%
Trova blocchi su istruzione verbale dei compagni	8%	12%	22%	58%

Tabella 2
Estratto di alcuni dati relativi all'utilizzo di ScratchJr in sezione.

Si sottolinea che tutte le attività condotte all'interno del laboratorio hanno consentito a ciascun bambino di mettere a disposizione del gruppo "ciò che sapeva fare",

assumendo, nel rispetto delle regole condivise, un ruolo ed un compito; di conseguenza si è instaurato un ambiente sereno che ha favorito la modalità di apprendimento cooperativo.
In merito agli obiettivi prefissati si può realisticamente affermare che la dimensione euristica di ScratchJr ha avuto ricadute significative sulle abilità attentive e di memoria di lavoro visuo-spaziale. Inoltre, l’opportunità di creare storie impegnandosi nella struttura della sceneggiatura (Figura 14 e 15) ha consentito ai bambini di sperimentare in maniera esplicita il passaggio da una forma di ragionamento concreto sugli oggetti e sull'ambiente reale ad un pensiero più astratto elicitato dall'utilizzo degli oggetti rappresentati nel mondo virtuale.

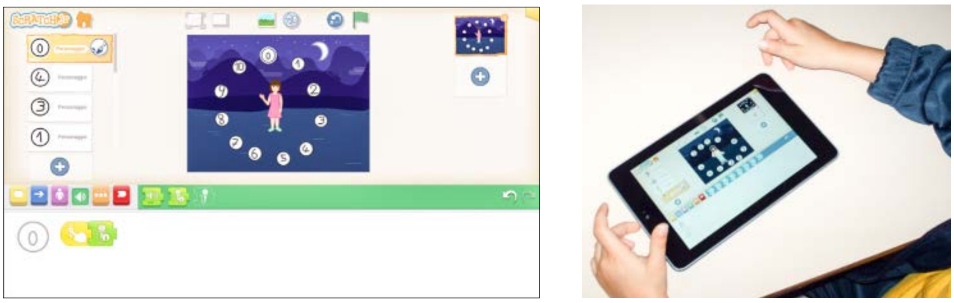


Figura 14
Filastrocca dei numeri.

Figura 15
Confronto di quantità.

Tutto ciò rientra nella competenza digitale che si presenta e sviluppa non come un’area a sé stante, ma come una competenza che entra in relazione e potenzia le altre aree di competenza. Dunque, non un impiego acritico e passivo di contenuti digitali, ma produzione di esperienze digitali fruite in termini di efficacia e rilevanza apprenditiva.

6 Conclusione

L’obiettivo di questo tipo di laboratori non è formare una generazione di futuri programmatori, ma educare i più piccoli al pensiero computazionale che coinvolge la capacità di risolvere problemi – anche complessi – applicando la logica, ragionando passo-passo sulla strategia migliore per arrivare alla soluzione.
ScratchJr è un ambiente di sviluppo pedagogico integrato proprio perché è un VPL che sostiene – senza tralasciare l’aspetto ludico – alcune significative esperienze a livello affettivo, cognitivo, metacognitivo e relazionali che costituiscono il filo con-

duttore della SdI.
Consente un approccio alla matematica nuovo, stimolante perché favorisce uno sviluppo poliedrico delle capacità mentali ed una formazione non solo matematica, ma anche socio-culturale.
In questo modo, i bambini non imparano soltanto a programmare ma programmano per imparare.
Per ciò che concerne, invece, i futuri insegnanti, è importante non solo sviluppare dal punto di vista teorico consapevolezza in merito alle potenzialità di ambienti di programmazione visuale, ma anche acquisire una serie di competenze metodologiche riguardo l'utilizzo in sezione.
Infatti, nell'intero percorso i contenuti digitali non sono stati concepiti come aggiuntivi a quelli tradizionali, ma come parte integrante di una attenta progettazione implementata attraverso una didattica per competenze, come previsto dalle Indicazioni Nazionali. Come si legge nella parte "Spazi e ambienti per l'apprendimento" del PNSD:
«(…) L'educazione nell'era digitale non deve porre al centro la tecnologia, ma i nuovi modelli di interazione didattica che la utilizzano».[18] 18

Bibliografia

Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. *Future of learning group publication, 5*(3), 438.

Beri, M., & Boscaini, M. (2016). *Imparare a programmare con Scratch. Il manuale per programmatori dai 9 anni in su.* Milano: Apogeo.

Bers, M. U., & Horn, M. S. (2010). Tangible programming in early childhood. *High-tech tots: Childhood in a digital world, 49*, 49-70.

Bers, M. U., Flannery, L., Kazakoff, E. R., & Sullivan, A. (2014). Computational thinking and tinkering: Exploration of an early childhood robotics curriculum. *Computers & Education*, *72*, 145-157.

Bruner, J. S. (1990). *Acts of meaning* (Vol. 3). Harvard: Harvard University Press.

Bruner, J. S. (2009). *Actual minds, possible worlds*. Harvard: Harvard University Press.

Calvani, A., (A cura di). (2007). *Tecnologia, scuola, processi cognitivi. Per una tecnologia dell'apprendere*. Milano: Franco Angeli.

Cejka, E., Rogers, C., & Portsmore, M. (2006). Kindergarten robotics: Using robotics to motivate math, science, and engineering literacy in elementary school. *International Journal of Engineering Education*, *22*(4), 711.

Clements, D. H. (1999). The future of educational computing research: The case of computer programming. *Information Technology in Childhood Education Annual, 1*, 147-179.

Costabile, F. A., & Serpe, A. (2010). The computer in nursery schools with the INF@ 0.1 software. An action-research experience. In *EDULEARN10 Proceedings* (pp. 3256-3262). IATED.

18. http://www.istruzione.it/scuola_digitale/allegati/Materiali/pnsd-layout-30.10-WEB.pdf (p. 28).

ESPERIENZA DIDATTICA

Costabile, F.A., & Serpe, A. (2011). La “prima matematica” con INF@0.1: un’esperienza monitorata nell’anno scolastico 2007/08. In D’Amore B., Sbaragli S. (Eds.), *Matematica ed esperienze didattiche* (pp. 80-81). Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). *Matematica: come farla amare: Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola.

Donaldson, M. (2009). Come ragionano i bambini. Springer Science & Business Media.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara, M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol 1 (pp. 55-69). Hiroshima: Hiroshima University.

Ferri, P., & Mantovani, S. (2006). *Bambini e computer. Alla scoperta delle nuove tecnologie a scuola e in famiglia*. ETAS RCS.

Ferri, P., & Mantovani, S. (2008). *Digital kids. Come i bambini usano il computer e come potrebbero usarlo genitori e insegnanti*. ETAS RCS.

Gardner, H. (1993). Multiple Intelligences: *The Theory in Practice*. A Reader.

Gardner, H. (2011). The Unschooled Mind: *How Children Think and How Schools Should Teach*. Basic Books.

Ioannidou, A., Repenning, A., Lewis, C., Cherry, G., & Rader, C. (2003). *Making constructionism work in the classroom*. International Journal of Computers for Mathematical Learn ing, *8*(1), 63-108.

Kazakoff, E. & Bers, M. (2012). Programming in a Robotics Context in the Kindergarten Class room: The Impact on Sequencing Skills. *Journal of Educational Multimedia and Hyperme dia*, *21*(4), 371-391.

Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking*. Prentice Hall, New York.

Littleton, K., & Mercer, N. (2013). *Interthinking: Putting talk to work*. Routledge.

Moomaw, S. (2011). *Teaching Mathematics in Early Childhood*. Brookes Publishing Company. PO Box 10624, Baltimore, MD 21285.

Norman, D. A. (1993). *Things that make us smart*. Addison Weasley, Reading (Mass.).

Norman, D. A. (2004). *Emotional design: Why we love (or hate) everyday things*. New York: Basic Civitas Books.

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*. Basic Books, 10 East 53rd St., New York, NY 10022-5299.

Pira F., Marrali V. (2007), *Infanzia, media e nuove tecnologie*, Milano: Franco Angeli.

Rader, C., Brand, C., & Lewis, C. (1997). Degrees of comprehension: children's under standing of a visual programming environment. In *Proceedings of the ACM SIGCHI Con ference on Human factors in computing systems* (pp. 351-358). New York: ACM.

Resnick, M. (2007). Sowing the seeds for a more creative society. *Learning and Leading with Technology*, *35*(4), 18-22.

Riva, G. (2014). *Nativi digitali: crescere e apprendere nel mondo dei nuovi media*. Bologna: Il Mulino.

Rogers, C., & Portsmore, M. (2004). Bringing engineering to elementary school. *Journal of STEM Education: innovations and research*, *5*(3/4), 17.

Sbaragli, S. (A cura di). (2011). *Buone pratiche d'aula in matematica. Percorsi didattici in continuità tra scuola dell'infanzia e secondaria di secondo grado*. Bologna: Pitagora.

Serpe, A. (2008). KidSmart: an essential tool for mathematical education in nursery schools. In *Learning to Live in the Knowledge Society* (pp. 313-320). Boston: Springer, MA.

Vygotskij, L. S. (2010). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*. Firenze: Giunti.

Sitografia

http://www.indicazioninazionali.it/
http://www.istruzione.it/allegati/2015/prot2187.pdf
http://www.istruzione.it/scuola_digitale/allegati/Materiali/pnsd-layout-30.10-WEB.pdf
https://www.programmailfuturo.it/media/docs/Circolare-Programma-il-Futuro-2016.pdf
https://programmailfuturo.it/
https://scratch.mit.edu

Autore/Annarosa Serpe
Dipartimento di Matematica e Informatica – Università della Calabria, Italia
annarosa.serpe@unical.it

Recensioni

DdM

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco.* Bari: Dedalo.

Questo testo, scritto a quattro mani da due fra i massimi esperti in Didattica della Matematica, non può che ricevere un parere estremamente positivo: è ricco, stimolante, avvincente e stuzzica il lettore con un racconto di carattere storico capace di permettere una vera riscoperta della Matematica e della sua evoluzione temporale, culturale, sociale … a più livelli.

Come gli stessi autori dichiarano nella premessa, *La matematica e la sua storia* non è un testo di storia della Matematica: non vuole assolutamente esserlo. I due autori hanno infatti un obiettivo diverso: vogliono, attraverso le pagine di questo testo (il primo di quattro volumi che non vedo l’ora di "assaporare" bene nella loro globalità), raccontarci la bellezza della Matematica e della sua storia; vogliono farci vivere la lenta e "complessa" evoluzione della disciplina; vogliono farci conoscere più da vicino i personaggi chiave sui quali si fondano le conoscenze matematiche che si studiano a scuola e all’Università.

La Matematica, come sostengono a più riprese Bruno D’Amore e Silvia Sbaragli, è un umanesimo; spesso però il sapere matematico è erroneamente percepito come esclusivamente formale, astratto, rigido, a-culturale, a-politico, a-geografico, a-filosofico, … a-temporale. La "regina delle Scienze" viene quindi erroneamente interpretata, in alcuni casi, come una semplice successione di teoremi, di regole e formule, applicate per risolvere in modo meccanico esercizi spesso fini a sé stessi. Ma la Matematica non è questo! La Matematica è prima di tutto un’avventura intellettuale meravigliosa e come tale andrebbe invece presentata!

Con questo assunto, ciò che gli autori presentano in modo impeccabile nei cinque capitoli che compongono il testo permette al lettore di vivere "il viaggio matematico", dalle sue origini al "miracolo" greco, da tante angolazioni diverse, attraverso relazioni interdisciplinari con la Musica, l’Arte, la Letteratura, la Filosofia, la Geografia … Ciò che ne deriva, come ribadito anche in precedenza, è un testo veramente appassionante, un viaggio nel tempo e nello spazio entusiasmante che pian piano permette al lettore di riflettere su chi e che cosa ha influenzato il pensiero e, più in generale, la cultura.

Il conteggio con le dita della mano è universale, assoluto? Platone e Socrate erano "matematici"? Qual è la reale antichità dell’enunciato del teorema di Pitagora? Dove ha vissuto Talete?

Queste sono solo alcune delle domande alle quali in modo implicito o esplicito gli autori rispondono nel testo. Lo stile è sempre piacevole e mai noioso o ridondante.

Ritengo che studenti, insegnanti e studiosi anche di altre discipline abbiano l’opportunità di trovare in questo testo spunti di riflessione notevoli che possono, se lo vorranno, approfondire ancor di più anche grazie alla ricchissima bibliografia riportata nel testo dagli autori.

Nell’attesa di poter proseguire la passeggiata, come la definiscono Bruno D’Amore e Silvia Sbaragli, nella storia della Matematica che sarà proposta nei prossimi tre volumi promessi dagli autori, vi auguro buona lettura e buon divertimento!

Benedetto Di Paola
Università di Palermo, Italia

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking. The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing.

La comunità scientifica e il mondo della scuola sono debitori nei confronti di Raymond Duval che, agli inizi degli anni '90 del secolo scorso, ha operato un'autentica rivoluzione nel modo in cui guardiamo alla cognizione e ai processi di insegnamento / apprendimento della matematica. Duval ha ribaltato il punto di vista della psicologia cognitiva che introduce l'uso delle rappresentazioni semiotiche *dopo* che l'individuo ha costruito l'immagine mentale di un concetto, per manipolarlo e comunicarlo. Duval sostiene, invece, che le immagini mentali sono l'interiorizzazione di una complessa rete di rappresentazioni e trasformazioni semiotiche, che è *costitutiva* del funzionamento cognitivo della matematica. Infatti la speciale situazione ontologica ed epistemologica della matematica non consente di accedere agli oggetti matematici senza la mediazione di segni. È diventata celebre la sua affermazione "non c'è noetica senza semiotica" e altrettanto celebre il *Paradosso Cognitivo* individuato da Duval, che induce l'allievo, nella fase di apprendimento, a *confondere* le rappresentazioni semiotiche dell'oggetto matematico con l'oggetto stesso. L'affascinante cammino di ricerca intrapreso da Duval si è sviluppato lungo due percorsi intrecciati che si sono alimentati a vicenda: l'indagine teorica e il riscontro continuo delle riflessioni filosofiche nella concretezza della vita d'aula nella quale il protagonista è l'allievo, impegnato a superare il *Paradosso Cognitivo* facendosi carico del proprio apprendimento.

In questo testo, Duval accompagna il lettore lungo le tappe fondamentali che hanno segnato il suo trentennale impegno di ricerca: la genesi della sua ricerca che ha rivoluzionato il rapporto tra conoscenza e rappresentazione; il ruolo delle trasformazioni semiotiche nello sviluppo della matematica; la questione del significato degli oggetti matematici quando sono accessibili tramite più di una rappresentazione semiotica.

La teoria di Duval si fonda sulla nozione di *registro semiotico*, complesse strutture di segni nelle quali le rappresentazioni semiotiche hanno significato e vengono costruite, e nelle quali e tra le quali vengono trasformate. La struttura dei registri semiotici determina il funzionamento cognitivo del pensiero matematico e permette di individuare le variabili cognitive fondamentali sia per l'analisi teorica dell'apprendimento sia per l'implementazione di adeguate attività costruite sulla base di una consapevole ingegneria didattica.

Un testo impegnativo che vale la pena affrontare per la profondità dei contenuti, la ricchezza degli esempi e per l'interesse delle questioni che prende in esame. Una lettura che consiglio sia al ricercatore in didattica della matematica, anche esperto di semiotica, sia all'insegnante di matematica che può consolidare la sua preparazione didattica e trovare spunti per costruire un'ingegneria didattica fine, intelligente ed efficace.

Giorgio Santi
Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica di Bologna, Italia

Tozzi, L. (2018). *Il cerchio quadrato e altre filastrocche geometriche*. Torino: Einaudi ragazzi.

Nel tempo, le profonde connessioni fra matematica e letteratura sono state colte da studiosi e artisti di formazione diversa; fra i vari, Italo Calvino (1962) è arrivato a scrivere che «l'atteggiamento scientifico e quello poetico coincidono: entrambi sono atteggiamenti insieme di ricerca e di progettazione, di scoperta e di invenzione». Le trenta filastrocche che Lorenzo Tozzi propone in questo volume concretizzano questa visione congiunta accompagnando, con leggerezza e cura metrica e lessicale, il lettore a scoprire la geometria in rima: nei testi, gli oggetti e il lessico del quotidiano (dal cono gelato al triangolo catarifrangente, dalla pizza alle mattonelle del bagno) si alternano a enti, elementi, proprietà e termini geometrici (piano, rette, figure, angoli), senza fratture, in una combinazione resa efficace dal tessuto poetico.

Le "scintille narrative" (per usare un'espressione di Gianni Rodari, la cui presenza si avverte fra le pagine della raccolta) scoccano in modi diversi. C'è *Il cerchio quadrato* che dà il titolo al libro e che è solo in apparenza «tutto sbagliato»; ci sono *Le rette parallele*, innamorate e costrette a non baciarsi mai; c'è *Il cubo*, con le sue sei facce (che fanno boccacce e linguacce); ci sono oggetti concreti come il triangolo catarifrangente o la pizza (con la sua geometria di spicchi e quadretti); ci sono miracoli geometrici della natura, come i fiocchi di neve e la farfalla («Gioco di specchi, pura magia/che bell'esempio di simmetria!»); e c'è persino *Quel gran genio di Talete*, che esce dalla storia per raccontarci la sua intuizione (come misurare l'altezza di un oggetto enorme come una piramide egizia?). Senza tralasciare una sezione finale dedicata agli angoli: *Storie segrete di angoli*.

Di particolare fascino e utilità didattica sono le filastrocche che sfruttano la polisemia di alcune parole condivise dal mondo "reale" – coi suoi referenti concreti – e dalla geometria, in cui sono termini precisi (ma in cui, scrive Tozzi, "resta tutto «in teoria»": così le *corde* della circonferenza non si possono usare né per suonare né per arrampicare). Giocare con le parole che hanno più significati è un gioco molto serio, che apre la mente e aiuta sia l'apprendimento matematico, sia l'arricchimento lessicale. Perché tutto passa attraverso le parole, che aiutano a comprendere e a spiegare, a sé e agli altri, le cose. Ad esempio, scoprire che il *piano* è (legittimamente) uno strumento, il piano di una casa, ma anche un avverbio, oltre che «un luogo geometrico, una superficie!» non è un ingombro, ma una ricchezza, e un'attività da proporre a scuola a bambini e ragazzi sin da piccoli: ciò li aiuterà a gestire contesti d'uso diversi e a lavorare su alcune radicate misconcezioni. Così il rombo, il cono, il volume o la scala sono esempi in questo senso che si trovano nel libro.

Le illustrazioni di Giulia Orecchia accompagnano efficacemente ogni testo e rendono il libretto ancor più un prezioso strumento didattico utile tanto al docente di matematica, quanto a quello di italiano (e, perché no, anche a chi insegna arte), da usare per avviare percorsi interdisciplinari di scoperta e approfondimento in vari ordini di scolarità. Perché la filastrocca è un «giocattolo sonoro», come lo chiamava Rodari, solo in apparenza semplice, ma, in realtà, è un genere ricco e potente, che sollecita la memoria, l'invenzione, il ragionamento e l'uso della lingua. E che sa persino mostrare come la geometria e la realtà siano distinte solo per chi non ne sa abbastanza, come *Il bambino che litigò con la geometria*, eliminandola dalla sua vita. Ma, sul campetto da calcio, senza geometria…

(…) Mancavano le aree,
il perimetro di gioco,
non parliam del centro campo
e – scusatemi se poco –
non trovarono più gli angoli
e l'incrocio dei due pali… (…) (p. 55)

«Causa geometria sparita/non si fa più la partita!». E non si farebbero molte altre cose, senza i suoi concetti e senza le sue parole, spesso patrimonio comune della lingua di tutti i giorni.

Silvia Demartini
Dipartimento formazione e apprendimento
Supsi di Locarno, Svizzera

De Nuccio, S. (2017). *Évariste Galois. Vita e opere.* Canterano (Roma): Aracne Editrice.

Ho già avuto modo di conoscere e apprezzare questo autore, in particolare leggendo le sue opere uscite tra il 2003 e il 2011 (in diverse edizioni e volumi),[1] pure dedicate a 1
Galois, delle quali ho scritto le recensioni apparse sulla rivista *Bollettino dei docenti di matematica,* nr. *56, 59* e *65*.
In questo nuovo volume, inserito nella collana interdisciplinare *L'algebra e le sue applicazioni tra classico e moderno*, diretta da Alfio Ragusa dell'Università di Catania, ritrovo la stessa sensibilità che l'autore ha nei confronti dell'insegnamento della matematica e la scrupolosa cura nel presentare riferimenti storici, accuratamente cercati e accompagnati da precisi riferimenti bibliografici.
Évariste Galois è sicuramente il matematico preferito dall'autore, che ne ha scandagliato profondamente sia la vita turbolenta sia le opere, restituendo in questi volumi notizie e spunti di grande ricchezza per l'insegnamento nelle scuole superiori e in parte anche nelle scuole medie.
Fra i contenuti di spicco si trovano le note tratte da un quaderno inedito di Galois, memorie sulla risolubilità algebrica delle equazioni, una lettera testamento e due articoli sull'insegnamento della matematica.
Si sa da tempo come sia preziosa la prospettiva storica nella didattica della matematica, non certamente per aggiungere nuova materia ai programmi scolastici, ma piuttosto per creare un ambiente di apprendimento più consono alla realtà dello sviluppo temporale e umano della matematica. Ciò permetterebbe di arricchire la pratica didattica con un tocco di umanesimo apprezzato soprattutto da quegli studenti che normalmente non riescono a costruirsi un interesse per la disciplina in sé.

Gianfranco Arrigo
Società matematica della svizzera italiana (SMASI)
Lugano, Svizzera

Patras, F. (2017). *Il pensiero matematico contemporaneo.* Torino: Bollati Boringhieri.

Si sente spesso dire che filosofia e matematica stanno bene insieme. Ebbene, questo testo ne è un esempio calzante. Ma dove sta questo intreccio? Nella convinzione

1. Si tratta dei volumi:
De Nuccio, S. (2003). *12 compiti scolastici di Évariste Galois*. Campobasso: Edizioni Goliardiche.
De Nuccio, S. (2003-2009-2011 con Barile M.). *Lezioni di matematica dagli scritti di Évariste Galois*. Campobasso: Edizioni Goliardiche.

dell'autore, sostenuta attraverso riferimenti a matematici e filosofi dell'età moderna, che da un lato la matematica abbia attinto dal bacino generale della teoria della conoscenza per evolvere e individuare nuove sfide, e dall'altro la filosofia abbia sempre guardato alla matematica e al suo linguaggio come a una delle manifestazioni più eleganti e misteriose delle potenzialità del pensiero umano. Una sorta di andata e ritorno fra due discipline, in un viaggio affascinante che, attraverso gli snodi dei capitoli del libro, tenta di affrontare questioni impegnative: quali sono il significato e la legittimità del sapere matematico? Come si inseriscono nella nostra conoscenza del mondo fenomenico?

L'autore del libro non si limita a evidenziare la fecondità che questo rapporto ha vissuto in passato. Anzi, è proprio grazie all'analisi storico-epistemologica della rivoluzione cartesiana, illuminista, fino ad arrivare alla crisi dei fondamenti di inizio novecento e ai teoremi di Gödel, che si capisce qual è il vero obiettivo di Patras: tentare di riportare all'attenzione degli scienziati il dibattito filosofico incentrato sulla matematica, la sua organizzazione, le sue correnti interne, il rapporto che ha con la realtà, l'intuizione e l'immaginazione. Per troppo tempo, dopo l'esperienza organizzatrice dello strutturalismo di Bourbaki (la cui posizione in riferimento al dibattito filosofico sulla matematica era quella di "non avere una posizione") i matematici hanno eluso le tematiche epistemologiche e fondazionali della disciplina, come se la questione si fosse chiusa definitivamente dopo i teoremi di incompletezza di Gödel. Il risultato? Una tendenza tutt'ora in atto alla specializzazione, all'iper-parcellizzazione della matematica, a causa della quale gli addetti ai lavori limitano il proprio impegno ad un programma pragmatico e serrato di ricerca, senza riuscire però a inserirsi in un contesto culturale più ampio e reale, un contesto – per dirlo alla Bruner – con un "senso umano".

Il pensiero matematico contemporaneo è un libro per chi già conosce la storia della matematica degli ultimi due secoli e ne vuole ripercorrere gli snodi con un approccio filosofico; ma è anche un libro per insegnanti di scuola media e superiore che desiderano riappropriarsi di un sapere ricco, non privo di insidie e domande grandi, e magari costruire insieme agli studenti un orizzonte di senso che, a fianco di un'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze, accolga anche quelle dimensioni culturali che porterebbero, finalmente, ad un nuovo umanesimo scientifico.

Michele Canducci
Dipartimento formazione e apprendimento
Supsi di Locarno, Svizzera